Das I Ging

An Stelle von
Heimat halte ich
die Wandlungen
der Welt
(Nelly Sachs)

Die Zeit

Geschichte ist Zeit; Zeit damit der "Gegenstand" der Geschichtsforschung. Das älteste Buch über die Zeit ist wohl das I Ging. Zugleich werden in den Hexagrammen des I Ging die Zahlen *000000* bis *111111* (binär) abgebildet, das heißt, im I Ging geht es auch um Mathematik. Da ja die enge Verbindung von Mathematik und Geschichte zu meinen Lieblingsthemen gehört, liegt es nahe, dazu auch dieses älteste Buch über die Zeit zu "beforschen". In diesen Seiten soll es um die Struktur des I Ging gehen; sie wenden sich an Leser/innen, die sich schon eingehender mit diesem Buch auseinandergesetzt haben. Die - ebenfalls höchst interessanten - Aspekte semantischer Ausdeutungen habe ich daher hier gänzlich außer Acht gelassen; bis auf die (übersetzten) Namen der Hexagramme. Die habe ich der Richard-Wilhelm-Übersetzung entnommen, obwohl ich auch die dieser Übersetzung zu Grunde liegende konfuzianische Deutung des I Ging für fragwürdig halte. Diese Bezeichnungen sind aber geläufig und daher wohl am besten geeignet, eine "Stütze" zur Orientierung zu sein.

Algebra

Es gibt im Wesentlichen zwei Arten der Verbindung zwischen zwei Hexagrammen: Das Wandeln einer Linie oder die Bildung eines Gegensatzes. Auf den Wegen der Wandlungen stellen die Gegensätze Querverbindungen, Abkürzungen sozusagen her. Um diese Gegensätze soll es hier in erster Linie gehen. Es gibt traditioneller Weise drei Arten der Gegensatzbildung: ***pang-tung*** (alle Linien werden gewandelt), ***tsien-gua*** (das Zeichen wird umgedreht, das heißt an seiner Horizontalachse gespiegelt) und ***giau-gua*** (oberes und unteres Trigramm werden miteinander vertauscht). Während pang-tung mit der Operation des Wandels einzelner Linien (yin in yang oder umgekehrt) verbunden ist, liegt tsien-gua und giau-gua das Vertauschen von Linien als Grundoperation zu Grunde. Eine einfache algebraische Erörterung zeigt, dass diese Gegensatzoperation quasi auf natürliche Weise zusammen gehören. Bei dieser Betrachtung wird naheliegender Weise die "identische Operation" (das Hexagramm bleibt so wie es ist) als vierter Gegensatz betrachtet.

<a1,...,a6>, wobei *a1,...,a6* für Zahlen zwischen 1 und 6 stehen, bezeichne einen Vertauschungsoperator auf der Menge der Hexagramme. Zu lesen ist er so: die erste Linie wird mit der Linie a1 vertauscht, dann die zweite mit a2, usw. und schließlich die letzte mit a6. Damit das Ganze sinnvoll bleibt, betrachte ich hier nur solche Operatoren, für die *{a1,...,a6} = {1,...,6}* gilt. Sie können vielleicht ***reguläre Operatoren*** genannt werden. Die Menge der regulären Vertauschungsoperatoren ist bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe mit *6! = 720* Elementen, die sechselementige ***Permutationsgruppe***.

Der ***Index*** einer Operation sei die Zahl der Hintereinanderausführungen, die benötigt werden, um jedes Hexagramm in sich selbst zu überführen. Die Hexagramme sind in dieser Hinsicht, was das Vertauschen von Linien angeht, zyklisch aufgebaut: Jede Vertauschungsoperation hat einen endlichen Index, das heißt, sie überführt, wird sie oft genug ausgeführt, jedes Hexagramm in sich selbst.

Gegensätze sind Vertauschungsoperatoren mit Index 2; das heißt, sie bilden zweimal angewendet jedes Zeichen auf sich selbst ab. Eine solche duale Grundstruktur gehört ja zu den typischen Eigenschaften von Gegensätzen. Sie stellt auch einen bestimmten Modus der Zeit, den der Gleichzeitigkeit beziehungsweise Gegenwart dar - im Unterschied zu den Wandlungen, die sich immer nur in der Zeit vollziehen; daher die Bedeutung der Gegensätze im I Ging. Da sich nun jede Permutation sich als Hintereinanderausführung von Transpositionen darstellen lässt, können alle regulären Vertauschungsoperationen als Hintereinanderausführung von solchen mit Index 2 durchgeführt werden. Jeder Gegensatz lässt sich durch endlich viele Wandlungen darstellen. Es gibt 75 Vertauschungsoperatoren mit Index 1 oder 2, davon eine, die keine Linien vertauscht (die Identität mit Index 1), 15, die zwei Linien miteinander vertauschen, 45, die vier Linien miteinander vertauschen und 14, die alle sechs Linien miteinander vertauschen.

Nun ist ja ein wesentlicher Aspekt der Hexagramme im I Ging der, dass sie aus Trigrammen zusammengesetzt sind. Dass die Transparenz dieser Zusammensetzung aus oberem und unterem Trigramm erhalten bleibt, soll nun das Kriterium für die weitere Auswahl geeigneter Gegensätze sein. Dafür folgende Sprechweise:

*<a1,...,a6> heiße **positionerhaltend**, wenn {a1,a2,a3} = {1,2,3}.*
*<a1,...,a6> heiße **positionwechselnd**, wenn {a1,a2,a3} = {4,5,6}.*
*<a1,...,a6> heiße **trigrammtrennend**, wenn sie **positionerhaltend** oder **positionwechselnd** ist*

Positionerhaltende und positionwechselnde Operationen gibt es jeweils 36, aber nur 16, die zugleich auch den Index 2 oder 1 haben. Das Trigramm abc (die Buchstaben stehen für yin- oder yang-Linien) wird durch eine solche trigrammtrennende Operation auf eines der Menge {abc,acb,bac,cba} abgebildet. Und weiter gilt für trigrammtrennende Operationen:

*<a1,...,a6> heiße **trigrammsymmetrisch**, wenn sie ein Hexagramm abcabc auf eines der Menge {abcabc, acbacb, bacbac, cbacba} abbildet*
*<a1,...,a6> heiße **symmetrieerhaltend**, wenn sie ein Hexagramm abcabc auf eines der Menge {abcabc, abccba ,cbaabc ,cbacba} abbildet*

Das sind nochmal zwei Kriterien, die das Ganze auf Symmetrien hin fokussiert. Die Trigrammsymetrie schränkt die Auswahl der Gegensätze auf die ein, die im Hexagramm oben und unten in gleicher Weise operieren.

***Symmetrieerhaltend** ist eine trigrammtrennende Operation dann, wenn sie seine Symmetrieeigenschaft (symmetrisch oder asymmetrisch) erhält.*

Jetzt ist es so weit:

*Eine **trigrammtrennende**, **trigrammsymmetrische** und **symmetrieerhaltende** Operation heiße **Gegensatz**.*

Bezeichnungsweise:

- ***id** stehe für die Identität,*
- ***pt** stehe für pang-tung,*
- ***tg** stehe für tsien-gua*
- ***gg** stehe für giau-gua*
- ***tg-gg** stehe für "tsien-gua nach giau-gua angewendet"*

{id, pt, tg, gg, tg-gg} ist die Menge der Gegensätze

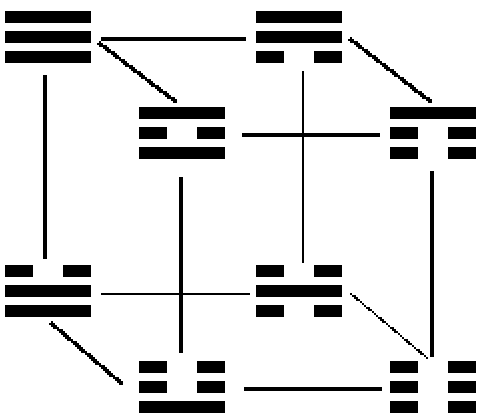
Die drei klassischen Gegensätze, die die innere Struktur des I Ging prägen, sind also zum einen dadurch charakterisiert, dass ihre zweimalige Anwendung wieder zum Ausgangshexagramm führt, und zum anderen dadurch, dass sie die Symmetrieeigenschaften jeweils der oberen und unteren Trigramme erhalten.

Die Menge *G = {id, pt, tg, gg, tg-gg}* ist eine fünfelementige Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung. Auf der Menge der Hexagramme lässt sich G als Äquivalenzrelation auffassen. Nach dem bislang Erörterten liegt die Vermutung nahe, dass die Äquivalenzklassen bezüglich G als Symmetrieklassen der Hexagramme gedeutet werden können.

Der Gegensatz

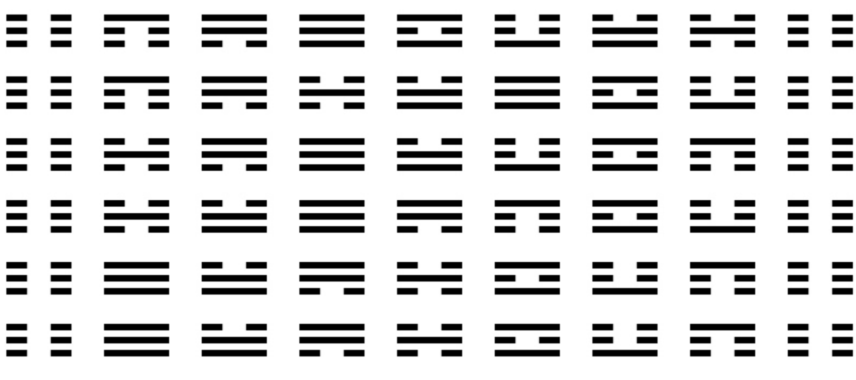
Die drei klassischen Gegensätze *pang-tung* (alle Linien werden gewandelt), *tsien-gua* (das Hexagramm wird auf den Kopf gestellt) und *giau-gua* (oberes und unteres Trigramm werden miteinander vertauscht) definieren (natürlich als Erzeugendensystem einer Gruppe verstanden) eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Hexagramme. Die durch sie gebildeten Äquivalenzklassen geben einen Einblick in die symmetrische Struktur des I Ging. Das I Ging ist ein Buch über die Zeit, die Wandlungen; Symmetrie ist ein Attribut der Gleichzeitigkeit, des Gegenwärtigen. Wie dargelegt leitet sie sich aus der Operation des Vertauschens ab. Die Symmetrien könnten also verstanden werden als ein festes, beständiges Raster, in dem sich die Wandlungen vollziehen. Das ihnen zu Grunde liegende Vertauschen von Linien stellt die Beständigkeit des Veränderlichen dar, die reversiblen, anentropischen Aspekte der Zeit.

Pang-tung, das Wandeln aller Linien ist nun ein Extremfall der Wandlungen, der beständige Aspekt des Wandels schlechthin. **Jedem Anfang folgt ein Ende, jedem Ende folgt die Wiederkehr.** In diesem Satz lassen sich vielleicht tsien-gua und giau-gua als zwei Aspekte (mikro- und makrokosmisch) des Verhältnisses von Anfang und Ende auffassen und pang-tung als das von Ende und Wiederkehr. Soviel mal als vorsichtige Andeutung (hier geht es schon sehr ins Semantische). Die Hexagramme, um wieder ein wenig Mathematik zu betreiben, lassen sich als Ecken eines Graphen auffassen, von denen zwei genau dann miteinander verbunden sind, wenn sie durch das Wandeln einer Linie ineinander übergehen. Der Graph, der so gebildet wird, ist der sechsdimensionale Würfel. Das lässt sich auch mit den Trigrammen machen; heraus kommt ein dreidimensionaler Würfel:



Hier müssen sich zwei Trigramme, die ineinander durch das Wandeln einer Linie überführbar sind, als mit einer Kante verbunden gedacht werden. Ein "Rundweg" durch einen Graphen, der jede Ecke desselben genau ein Mal durchläuft, heißt ein ***Hamiltonscher Kreis***. In diesem Würfel gibt es sechs solcher Hamiltonscher Kreise.

Das heißt durch das Wandeln jeweils einer Linie lassen sich die Trigramme in sechs verschiedenen Reihenfolgen darstellen:



Diese Betrachtungen für die Hexagramme durchzuführen, wird beliebig umfangreich und komplex. Worauf ich hier hinaus will, ist die Beobachtung, dass sich bezüglich des Linienwandelns die Menge der Hexagramme, wie die der Trigramme schließt; und zwar in einer asymmetrischen Weise. Pang-tung stellt genau diese Asymmetrie des Schließens dar: Der Modus des Gleichzeitigen (Gegensätze) und der des beständigen Wandels sind nicht miteinander kompatibel. Sie sind *inkommensurabel*, um einen Begriff aus der Mathematik zu verwenden.

Doch jetzt zu den Symmetrieklassen:

Die Äquivalenzklassen bilden wiederum Gruppen, die sich charakterisieren lassen durch die Trigramme, die in ihren Hexagrammen als obere oder untere vorkommen, von denen sie erzeugt werden. Da gibt es dann: Vier Äquivalenzklassen mit jeweils acht Hexagrammen. Sie bilden zwei Gruppen mit jeweils zwei Hexagrammen, die wiederum jede von sechs Trigrammen erzeugt wird. Sechs Äquivalenzklassen mit jeweils vier Hexagrammen. Sie bilden zwei Gruppen mit jeweils vier beziehungsweise zwei Hexagrammen, die wiederum jede von vier Trigrammen erzeugt wird. Vier Äquivalenzklassen mit jeweils zwei Hexagrammen. Sie bilden zwei Gruppen mit jeweils zwei Hexagrammen, die wiederum jede von zwei Trigrammen erzeugt wird. Die Klassen sind geordnet nach der Menge der erzeugenden Trigramme. Die wiederum teile ich ein in die ***asymmetrischen Trigrammmengen (A)*** und die ***symmetrischen Trigrammmengen (S1 und S2)***.

Die Achtergruppen:

Erzeugende Trigramme (A + S1):

(VIII 1) 9 10 15 16 23 24 43 44

(VIII 2) 19 20 33 34 25 26 45 46

Erzeugende Trigramme (A + S2):

(VIII 3) 37 38 39 40 3 4 49 50

(VIII 4) 55 56 59 60 21 22 47 48

Die Vierergruppen:

Erzeugende Trigramme (A):

(IV 1) 17 18 53 54

(IV 2) 27 28 61 62

(IV 3) 51 52 57 58

(IV 4) 31 32 41 42

Erzeugende Trigramme (S1 + S2):

(IV 5) 5 6 35 36

(IV 6) 7 8 13 14

Die Zweiergruppen:

Erzeugende Trigramme (S1):

(II 1) 29 30

(II 2) 63 64

Erzeugende Trigramme (S2):

(II 3) 1 2

(II 4) 11 12

Zum Schluss noch eine Tabelle, die Auskunft gibt, wie die Symmetrieklassen zueinander bezüglich des Wandelns einzelner Linien stehen. Durch die Symmetrieeigenschaften der Gegensätze ist es dabei egal, ob die 1., 3., 4. oder 6. beziehungsweise die 2. oder 5. Linie gewandelt werden.

Klasse	**1., 3., 4., 6. Linie**	**2., 5. Linie**
VIII 1	II 3, IV 2, IV 3, IV 5	VIII 2, VIII 3
VIII 2	II 4, IV 1, IV 4, IV 6	VIII 1, VIII 4
VIII 3	II 2, IV 1, IV 4, IV 6	VIII 1, VIII 4
VIII 4	II 1, IV 2, IV 3, IV 5	VIII 2, VIII 3
IV 1	VIII 2, VIII 3	IV 3
IV 2	VIII 1, VIII 4	IV 4
IV 3	VIII 1, VIII 4	IV 1
IV 4	VIII 2, VIII 3	IV 2
IV 5	VIII 1, VIII 4	II 2, II 4
IV 6	VIII 1, VIII 4	II 1, II 4
II 1	VIII 4	IV 6
II 2	VIII 3	IV 5
II 3	VIII 1	IV 6
II 4	VIII 2	IV 5

Nun noch für die erzeugenden Trigrammmengen:

Menge	**1., 3., 4., 6. Linie**	**2., 5. Linie**
A + S1	A, S1, S1 + S2	A + S1, A + S2
A + S2	A, S2, S1 + S2	A + S1, A + S2
A	A + S1, A + S2	A
S1 + S2	A + S1, A + S2	S1, S2
S1	A + S1	S1 + S2
S2	A + S2	S1 + S2

Hajo Seng, ca. 1994

Primzahlfolgen

In dem Zusammenspiel von Bild, Bedeutung/Urteil und Zeitverlauf oder Zeitnetzwerk bilden die Zahlen eine sehr grundlegende Struktur, in der sich Aspekte der visuellen Wahrnehmungsverarbeitung (Raum, Bild), der auditiven Wahrnehmungsverarbeitung (Zeit) und der sprachlichen Verarbeitung durch Bedutungsgebung miteinander verbinden. Die folgende Betrachtung von Primzahlfolgen, die sich als Primzahlspektren visualisieren lassen gibt einen kleinen Einblick in die komplexe Struktur der Zahlen. Interessant sind hier die augenfälligen Ähnlichkeiten mit Lichtspektren, ähnlich der von Orbitalen etwa in Atomen.

Primzahlen haben mich bereits im Vorschulalter fasziniert. Ich hatte sich damals schon als so etwas wie Bausteine meines Denkens wahrgenommen, als Vermittler zwischen meinem sprachlichen und meinem sinnlichen, wahrnehmungsbezogenen Denken. Mein wahrnehmungsbezogenes Denken zerlegt die Wahrnehmungsinhalte wie ein Prisma in Spektren von Gedankenbausteinen, die miteinander Interferieren, sich gegenseitig verstärken oder auslöschen. Mit Hilfe dieser Spektren bin ich in der Lage, durch diese endlosen - und endlos verzweigten - Kaskaden von Assoziationen zu navigieren, aus denen mein wahrnehmungsbezogenes Denken besteht. Nach Temple Grandins Theorien gehöre ich zu den Musterdenkern und habe daher auch eine ausgeprägte Affinität zur Mathematik. Primzahlen stellen die Grundbausteine der sogenannten natürlichen Zahlen - bezüglich der Multiplikation - dar; der Zahlen, die die grundlegende Ordnung repräsentieren, mit der das Denken die Welt strukturiert. Die Grundlagen jeglicher Erkenntnis. Wie das wahrnehmungsbezogene Denkens seine Inhalte in Spektren aufspaltet, spalten die Primzahlen die Zahlen in Spektren auf und geben damit einen Einblick in ihre innere Ordnung. Sie transferieren diese Ordnung in die Sphäre des sprachlichen Denkens und machen sie damit mitteilbar.

Ohne es wirklich zu wissen, ahnte ich bereits damals, im Vorschulalter, dass es mit diesen Zahlen etwas ganz besonderes auf sich haben musste. Das habe ich in "Jan-Jan oder anders anders" anklingen lassen; unter anderem auch in einer Fragestellung, über die ich bislang erstaunlich wenig Literatur gefunden habe. Ich nenne diesen Themenbereich einmal "äquidistante Primzahlen". Gemeint sind damit Zahlenfolgen, die aus Primzahlen bestehen, die alle denselben Abstand voneinander haben, wie zum Beispiel die Folge (3, 5, 7). Diese Themenstellungen sind eng verwandt mit der Frage nach Primzahlen in arithmetischen Folgen; während aber für Primzahlen in arithmetischen Folgen Ergebnisse bekannt sind, weiß man über die Folgen von Primzahlen mit gleichem Abstand nur sehr wenig. Gibt es solche Folgen von beliebiger Länge? Oder gibt es nur sehr wenige - abgesehen von den Primzahlzwillingen, die ja einen Sonderfall dieser Folgen darstellen?

Zuvor gibt es ein paar Betrachtungen zu den Häufigkeiten von Primzahlen, Primzahlzwillingen und - allgemeiner - Primzahlpaaren. Es sind heuristische Betrachtungen, die von Hardy und Littlewood als Vermutungen formuliert wurden, und hier im Wesentlichen durch graphische Darstellungen nahegelegt werden sollen. Aus diesen Betrachtungen lassen sich weitere Fragenstellungen entwickeln, die Primzahlzerlegungen als Spektralzerlegungen von Zahlen betrachten.

Einführung

Bereits in der Antike waren Primzahlen Gegenstand mathematischer Betrachtungen; in Euklids Elementen aus dem zweiten vorchristlichen Jahrhundert wurden im Kontext der pythagoräischen Arithmetik mehrere Eigenschaften von Primzahlen bewiesen. Insbesondere auch, dass es unendlich viele davon gibt. Dieser Beweis beruht auf elementaren Teilbarkeitsüberlegungen. Wie häufig Primzahlen auftreten, war allerdings in der Antike nicht bekannt. Diese Frage konnte erst in der Neuzeit - mit Mitteln der Analysis und Algebra - mathematisch bearbeitet werden. Leonhard Euler zeigte, dass für jedes $n > 0$ mit *p prim* $\sum {}^{1}/_{ns} = \prod({}^{1-1}/_{ps})$*-1* für $s > 1$ gilt, das ***Eulersche Produkt***, und dass die Reihe der inversen Primzahlen divergiert (1737). Er führte die ***φ-Funktion*** ein, die jeder ganzen Zahl die Anzahl teilerfremder Zahlen zuordnet. Edmund Landau zeigte 1909, dass im Durchschnitt $\varphi(n) = {}^{3n}/_{\pi 2}$ (zu beachten ist, dass hier $\pi(n)$ (Funktion) und π (Zahl) zwei verschiedene Dinge bedeuten). Das bedeutet, dass zwei zufällig gewählte Zahlen mit der Wahrscheinlichkeit von 6/π2 teilerfremd sind. 1798 und 1808 arbeitete Adrien-Marie Legendre die Vermutung aus, dass die Häufigkeit $\pi(n)$ von Primzahlen gegen ${}^{n}/_{(\log(n)-A(n))}$ mit $A(n) = 1{,}08366\ldots$ konvergiert. Carl Friedrich Gauß präzisierte diese Vermutung 1792 (als Fünfzehnjäriger) zu $\pi(n) \sim Li(n) = \int{}^{dt}/_{\log(t)}$, woraus $\pi(n) \sim {}^{n}/_{\log(n)}$ folgt. Diese Vermutung konnte 1850 Pafnuti Tschebyscheff eingegrenzen, was einen wichtigen Schritt zu deren Beweis darstellte. Bernhard Riemann führte 1859 die ***ζ-Funktion*** als grundlegende zahlentheoretische Funktion und guter Abschätzung von $\pi(n)$ ein. Bewiesen wurde die Vermutung über die Häufigkeit von Primzahlen schließlich unabhängig voneinander von Charles-Jean de la Vallée Poussin und Jacques Salomon Hadamard 1896. Wem immer die analytische Zahlentheorie im Mathematikstudium begegnet, wird sich mit dessen Beweis ausführlich beschäftigen. Paul Erdös und Atle Selberg bewiesen den Primzahlsatz 1949 nur mit elementaren arithmetischen Abschätzungen. Während für $n \geq 11$ immer ${}^{n}/_{\log(n)} \leq \pi(n)$ gilt, konnte John E. Littlewood 1914 zeigen, dass $Li(n) - \pi(n)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

In der modernen Primzahlforschung tritt etwas auf, was nicht nur auf den ersten Blick mathematisch heikel erscheint: Heuristische Betrachtungen und auf statistischen Überlegungen beruhenden Vermutungen. Tatsächlich gibt es keine geschlossen berechenbare Funktion, die als Bildmenge die Primzahlen liefert, und es gibt keinen Beweis, der darlegt, dass die Primzahlen innerhalb der natürlichen Zahlen stastistisch verteilt sind. Aber genau das setzen solche auf stastistischen Überlegungen beruhenden Vermutungen. Es gibt inzwischen eine Fülle von solchen Vermutungen über Primzahlen, die häufig auch voneinander anbhängen. Eine gute Annäherung an diese Thematik bietet das Buch "Die Welt der Primzahlen. Geheimnisse und Rekorde" von Paulo Ribenboim (Springer, Heidelberg, 2006, 2. Aufl. 2011). Es ist insgesamt ein gutes Einführungsbuch in die Thematik mit vielen interessanten Beispielen und weiterführenden Literaturverweisen.

Primzahlpaare

Schon früh, als Kind, haben mich Symmetrien in Primzahlzerlegungen fasziniert. Das war aber keine theoretische Faszination, keine mathematische Beschäftigung im eigentlichen Sinne; ich hatte im Vorschulalter keine mathematische Zahlentheorie betrieben. Ich kann diese Symmetrien vielmehr sehen und früher hatte ich sie sehr oft gesehen, so oft, dass es mich ziemlich verunsichert, manchmal auch beängstigt hatte. Sie zeigen sich mir als Spektren, als Spektralzerlegungen von Zahlen, Anzahlen, Größen, Größenverhältnissen und Ordnungen. Immer dann, wenn Dinge die ihnen unterliegenden Strukturen zeigen, erscheinen sie mir in Regenbogenfarben - nur viel bunter. Zahlen wirken wie Prismen, die die Wirklichkeit in Muster zerlegen und damit einen Blick unter die Oberflächen gestatten, und damit das Gleiche im Verschiedenen zeigen. Die Primzahlen sind die Grundfarben dieser Spektren; das hatte ich bereits als Kind so wahrgenommen.

Anders aber als die Farben, die sich aus drei Grundfarben ableiten lassen, gibt es unendlich viele Primzahlen, die benötigt werden, um die Zahlen - unter dem Aspekt der Multiplikation - darzustellen. Entsprechend sind die primzahlzerlegten Wirklichkeiten bunter, viel bunter als alles, was gesehen werden kann. Aus heutiger Sicht würde ich mich gemäß der von Temple Grandin aufgestellten Kategorisierungen autistischen Bilderdenkens als Musterdenker einordnen. Die innere Welt eines solchen Denkens ist unendlich viel bunter und vielfältiger als es alle äußere Wirklichkeit überhaupt sein kann. Aber auch unendlich strukturierter und berechenbarer - auch wenn die Berechnungen meistens nicht trivial sind. Auch Musterdenker müssen einen produktiven Umgang mit ihrem Denken lernen. Früher hatte ich nicht selten sogenannte "Overloads" in der Form erlebt, dass ich meine Wahrnehmungen nicht mehr steuern konnte und sie dann die Gestalt dieser bunten, aber deutungs- und bedeutungslosen Muster angenommen hatten und mich damit weitgehend orientierungslos machten. Inzwischen erlebe ich solche Overloads selten, kann dafür mein Musterdenken vielfältig einsetzen – nicht nur für die Mathematik.

Bis heute konnte nicht bewiesen werden, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, obwohl dies offensichtlich der Fall zu sein scheint. Eine der wenigen grundlegenden Sätze zu diesem Thema konnte 1919 von .. Bruns bewiesen werden, nämlich, dass die Summe der Kehrwerte der Primzahlzwillingen konvergiert (gegen 1,9...). Hardy und Littlewood veröffentlichten 1923 die Vermutung, dass die Häufigkeit der Primzahlzwillinge $\pi_2(n)$ gegen $2*C_2*^n/_{(\log(n))^2}$ konvergiert. Dabei ist $C_2 = \prod(1-{}^1/_{(p-1)^2})$ die ***Zwillingskonstante*** und beträgt ungefähr *0,66016*. Sie setzen die statistische Verteilung der Primzahlen voraus, wobei natürlich für die zweite Primzahl eines Zwillings Abhängigkeiten zu berücksichtigen sind: Dass sie immer auch gerade ist (vorausgesetzt, die erste Primzahl ist nicht 2) und dass zu einer beliebigen ungeraden Primzahl p', die beiden Zwillinge zu jeweils anderen Restklassen modulo p' gehören. Hardy und Littlewood haben ihre Vermutung in "Partitio Numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes" aufgezeigt.

In diesem Buch befindet sich auch ihre Vermutung zur Häufigkeit von Zerlegungen einer geraden Zahl in zwei Primzahlen. Sie stellt eine Verallgemeinerung der sogenannten ***Goldbach-Vermutung***, die 1742 Christian Goldbach in einem Brief an Leonhard Euler geäußert hatte: Jede ganze Zahl ist die Summe dreier Primzahlen. Euler merkte an, dass diese Vermutung äquivalent ist zur Vermutung, dass jede gerade Zahl außer 2 als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann. Zu den wenigen bedeutenden Ergebnissen zur (bis heute unbewiesenen) Goldbach-Vermutung gehört das von Jingrun Chen, das er in der Zeit zwischen 1966 und 1978 in mehreren Schritten dargelegt und bewiesen hatte, dass es für jede gerade Zahl n (außer 2) zumindest die Darstellung $n = p + q*r$ mit primen p,q und r gibt. Chen konnte in dieser Zeit auch zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p+2 = q*r$ *(p, q und ,r prim)* gibt. Eine Zahl, die ein Produkt zweier Primzahlen ist, wird auch ***Fast-Primzahl*** genannt. Damit hat Chen zwei sehr bedeutende Vermutungen der Zahlentheorie "fast" bewiesen.

Eine weitere Vermutung von Hardy und Littlewood besagt, dass es für jede gerade Zahl d unendlich viele Primzahlen mit diesem Abstand d gibt. Die geben auch eine Abschätzung für deren Häufigkeit: $\pi d \sim \pi 2 * \prod_{[p>2|d]}(1 + {}^{1}/_{(p-2)})$. In den Häufigkeiten spiegeln sich in den Abständen von Primzahlpaaren die enthaltenen Primfaktoren wieder; sie bilden eine Art ***Spektrum der Teilbarkeit*** von Zahlen. Dabei kommt den ***Primfakultäten #p*** die Rolle als ***Hauptbanden*** der Spektren zu: $H = \{2, 6, 30, 210, 2310, ...\}$. Die Folgen $\{k * h, h \in H\}$ stellen dabei die jeweiligen ***Nebenbanden*** dar, die sich jeweils zwischen h und dem Nachfolger von h befinden.

Lücken und Paare

Der Primzahlsatz sagt aus, dass die Häufigkeit der Primzahlen kleiner als n sich proportional zu ${}^{1}/_{log(n)}$ verhält. Da es natürlich mit steigendem n immer mehr Zahlen gibt, durch die n möglicherweise teilbar sein könnte, ist die Abnahme der Häufigkeit von Primzahlen bei steigendem n naheliegend. Es ist auch die Proportionalität zu ${}^{1}/_{log(n)}$ nachvollziehbar, wenn man bedenkt, dass Primzahlen quasi die Grundbausteine der Zahlen bezüglich der Multiplikation darstellen; d.h. dass jede natürliche Zahl größer als 1 sich als Produkt von Primzahlen darstellen lässt. Unter der Annahme der statistischen Verteilung der Primzahlen ist auch die Vermutung gerechtfertigt, dass sich die Häufigkeit von Primzahlzwillingen relativ zu der der Primzahlen, ${}^{z}/_{p}$, wie ${}^{1}/_{log(p)}$ verhält. Damit verhält sich die Häufigkeit der Primzahlzwillinge erwartungsgemäß wie ${}^{1}/_{(log(n))^2}$. Elementare Teilbarkeitsüberlegungen führen zur ***Zwillingskonstanten*** als Proportionalitätskonstante.

Die Frage nach Primzahlen mit einer vorgegebenen Distanz ist eng mit der Frage nach Lücken zwischen zwei benachbarten Primzahlen verbunden. Eine von Hardy und Littlewoods Vermutungen (1923) besagt, dass $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$. Diese Vermutung ist nach dem Primzahlensatz naheligend. 1934 zeigte Heihachiro Ishikawa, dass $p_n + p_n +1 > p_n+ 2$, wobei p_n die n-te Primzahl ist. Das sind zwei gute Abschätzungen für die Verteilung der Primzahlen im Großen. Der Abstand d_n zwischen zwei aufeinander folgenen Primzahlen kann beliebig groß werden, was durch elementare Überlegungen eingesehen werden kann. Aber wieviele aufeinander folgende Primzahlen gibt es für einen gegebenen Abstand, die genau diesen Abstand haben? Gibt es überhaupt welche? Aus dem Jahr 1849 stammt die Vermutung von Alphonse de Polignac:

Für jede gerade Zahl d gibt es unendlich viele aufeinanderfolgende Primzahlen mit $d = p_n+1 - p_n$.

Diese Vermutung ist nicht bewiesen. Es ist noch nicht einmal bewiesen, ob es für jede gerade Zahl überhaupt zwei Primzahlen gibt egal, ob sie aufeinander folgen oder nicht, die diesen Abstand voneinander haben. R.O. Davies bewies immerhin 1984, dass es für jede

Zahl *N* eine gerade Zahl *d* gibt und mehr als *N* Primzahlpaare *p*, *q* mit Abstand *d*. Die Primzahlen sind vergleichsweise dicht verteilt; es gilt nämlich $lim(^{d(n)}/_{p(n)}) = 0$. Hierbei ist *p(n)* die *n-te Primzahl* und *d(n)* der Abstand zur folgenden Primzahl.

Wie schon bei den Primzahlzwillingen sieht es so aus, dass die Primzahlenpaare mit einem gegebenen geraden Abstand sich wie zufallsverteilt verhalten. Vor diesem Hintergrund macht es Sinn, von Häufigkeiten zu sprechen und mit Hardy und Littlewood zu vermuten, dass $\pi d \sim \pi 2 * \prod_{[p>2|d]}(1 + {}^{1}/_{(p-2)})$. Für die (geraden) Zahlen d, in der jede Primzahl nur einmal als Teiler vorkommt, bedeutet dies eine eins-zu-eins Abbildung zwischen den Häufigkeiten von Primzahlen mit dem Abstand d und der Zahl selbst. Wie in den Eingangsbemerkungen erwähnt entstehen bei der Visualisierung dieser Häufigkeiten Spektren mit den ***Primfakultäten*** als ***Hauptbanden*** und den restlichen Zahlen als ***Nebenbanden***, die zwischen der größten enthaltenen und der nächst größeren Primfakultät liegen. Ungerade Zahlen werden hierbei auf 0 oder 1 abgebildet und können daher aus diesen Betrachtungen ausgenommen werden.

Primzahlfolgen

Ein sehr schönes Thema aus der Primzahlforschung ist die Frage nach der Existenz von Folgen aus Primzahlen, die alle denselben Abstand voneinander haben. Ich hatte dieses Thema in "Jan-Jan oder anders anders" skizziert, wo die Folge *5, 11, 17, 23, 29* als Folge von besonderen Zahlen die beiden Romane "Jan-Jan oder anders anders" und "Beziehungsalgebra" durchziehen. Mit fünf Elementen ist diese Folge maximal, da in ihr jedes Element modulo 5 einen anderen Rest ergeben muss; die als nächstes folgende 35 ist daher durch 5 teilbar. Eine solche maximale Folge kann es auch nur geben, wenn der Abstand zwischen den Primzahlen dem Produkt aller kleineren Primzahlen entspricht wie in diesem Fall die 6, und die kleinste Primzahl kleiner als dieser Abstand ist. Ich werde das im Folgenden noch etwas formalisieren. Eine maximale Folge mit 7 Elementen würde daher mit 7 beginnen und die folgenden Zahlen mit dem Abstand 30 beinhalten: *7, 37, 67, 97, 127, 157* – die 187 ist aber durch 11 teilbar und nicht prim. Ist die 5 die größte Primzahl, die eine solche maximale Folge bildet - sowohl die *2 (2, 3)*, als auch die *3 (3, 5, 7)* bilden ja solche maximalen Folgen? Dann wären die fünf Zahlen aus Jan-Jan tatsächlich besondere Zahlen.

Besondere Zahlen markieren in meinem Leben besondere Zeiten, beispielsweise besondere Geburtstage.Nach der 35, die die 5-er Folge unterbricht, ginge es dann mit *41, 47, 53, 59* weiter bis mit der 65 wieder eine Zahl auftaucht, dir durch 5 teilbar und nicht mehr prim ist. Besondere Zeiten können aber auch besondere Tage sein, wie etwa der 11.8.1999, an dem ich im Nordschwarzwald die erste und vermutlich auch einzige totale Sonnenfinsternis meines Lebens gesehen habe. Besondere Zahlen müssen nicht zwangsläufig prim sein, aber Primzahlen eignen sich sehr dafür, besondere Zahlen zu sein. So geben diese Zahlen meinem Leben eine Ordnung, eine Struktur, die mir immer klar vor Augen führt, wo ich mich auf meinem Lebensweg gerade aufhalte.

Mit ***Primzahlmehrlingen*** sind aufeinanderfolgende Primzahlen mit kleinstmöglichem Abstand gemeint: *3, 5, 7* oder *7, 11, 13* oder *11, 13, 17* oder *13, 17, 19*. Kleinstmöglich sind die Abstände hier, weil außer *3, 5, 7* keine 3 Primzahlen den Abstand 2 voneinander haben können. Eine Folge von Abständen $(b_1, .., b_{k-1})$ heißt ***zulässig*** falls für jede Primzahl $q < k$ $\{0, b_i \bmod k\}$ echt in der Menge der *Restklassen mod q enthalten* ist. Die bislang größte Menge zulässiger Abstände wurde 2010 mit 17 Elementen gefunden.

Die ***Primzahlmehrlingvermutung*** besagt, dass es für jede zulässige Folgen von Abständen $(b_1, .., b_{k-1})$ unendlich viele *Primzahlen p* gibt, deren sämtliche Zahlen $p + b_i$ prim sind. Die Primzahlmehrlingvermutung ist äquivalent zur Vermutung von Hardy und Littlewood, dass für $x,y > 1$ $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$ gilt.

Zum Thema ***Primzahlen in arithmetischen Folgen*** hat J.P.G. Dirichlet 1837 gezeigt, dass die (unendliche) Folge $a + id$ unendlich viele Primzahlen enthält, wenn $d \geq 2$ und der d und a teilerfremd sind. 1939 konnte Johannes van der Corput zeigen, dass es unendlich viele arithmetische Folgen von drei Primzahlen gibt.

Eine ***arithmetische Folgen von k Primzahlen*** ist dabei eine Folge von k Primzahlen $p_1, ..., p_k$, in der $p_i – p_{i-1} = d$ für jedes $i > 1$ gilt. Ben Green und Terence Tao zeigten 2004, dass es für jedes $k \geq 4$ mindestens eine arithmetische Folge von Primzahlen gibt. Die längste arithmetische Folge, die bislang (2008) gefunden wurde, hat die Länge 23.

Beispiele

Maximale arithmethische Primzahlfolgen mit minimaler Distanz

(2, 3) Länge 2, Distanz #1 = 1
(3, 5, 7) Länge 3, Distanz #2 = 2
(5, 11, 17, 23, 29) Länge 5, Distanz #3 = 6

aber: *(7, 37, 67, 97, 127, 157)* Länge 6, Distanz #5 = 30, denn: *187 = 11 * 17*

Maximale arithmethische Primzahlfolgen

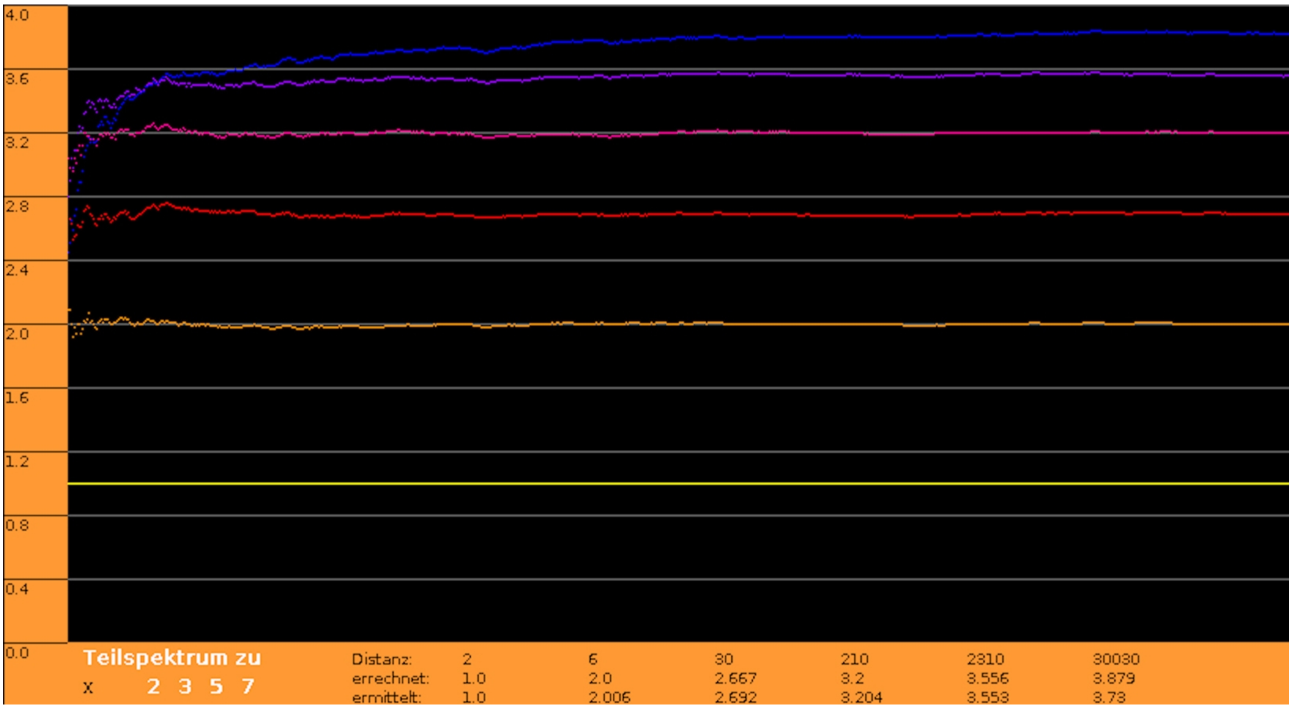
(5, 17, 29, 41, 53) Länge 5
(5, 47, 89, 131, 173) Länge 5
(5, 53, 101, 149, 197) Länge 5
(5, 101, 197, 293, 389) Länge 5

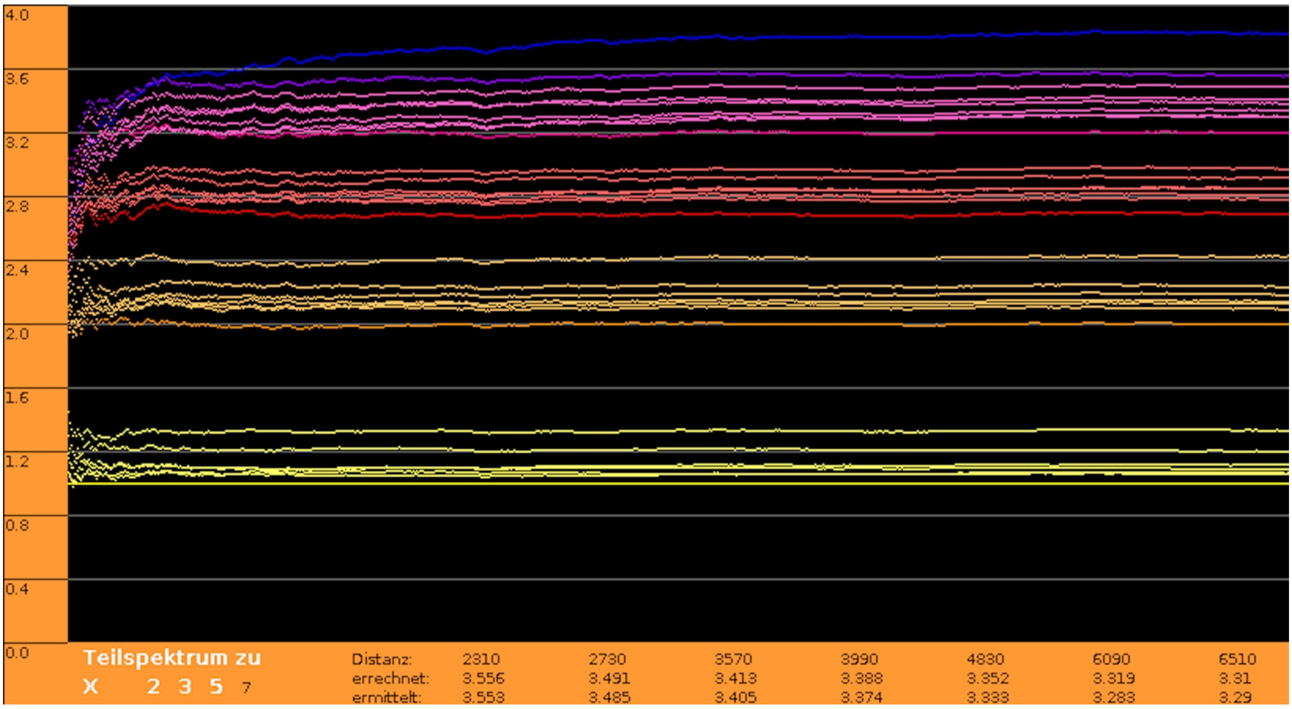
(7, 157, 307, 457, 607, 757, 907) Länge 7
(7, 2767, 5527, 8287, 11047, 13807, 16567) Länge 7

aber: *(199 ,409 ,619 ,829 ,1039 ,1249 ,1459 ,1669 ,1879 ,2089)* Länge 10, Distanz #7 = 210, denn: *2299 = 11 * 209*

Eine arithmethische Primzahlfolgen mit großer Länge

(766439, 1276949, 1787459, 2297969, 2808479, 3318989, 3829499, 4340009, 4850519, 5361029, 5871539, 6382049, 6892559) Länge 13, Distanz #19 = 510510.





Eine Computer-berechnete visuelle Darstellung eines Primzahlspekrums. Oben eine einfache Form mit den als „Distanzen“ bezeichneten Hauptlinien (*2, 6, 30, 210, …*) unten eine komplexere mit den Nebenlinien zur Hauptlinie $x = 7$, die sich durch die entsprechenden Produkte jeweils als als Teilspektrum ergeben, also *2310, 2730, 3570, …*

Hajo Seng, 2008