

# Produktgraphen als aufspannende Teilgraphen von verallgemeinerten de Bruijn Graphen

Diplomarbeit  
am Fachbereich Mathematik  
der Universität Hamburg

vorgelegt von  
Hajo Seng

Juli 1996

# 1 Inhaltsverzeichnis

1	<i>Einführung und Literaturübersicht</i>	2
1.1	<i>Etwas Zahlentheorie und elementare Betrachtungen</i>	3
1.2	<i>Das Grad Durchmesser Problem</i>	6
1.3	<i>Einbettungen und Modifikationen</i>	9
2	<i>Vierkreise</i>	11
2.1	<i>Einbettung von Produktgraphen</i>	11
2.2	<i>Vier Vierkreis Lemmata</i>	15
3	<i>Drei Propositionen</i>	20
4	<i>Die Sätze</i>	38
4.1	<i>Zwei Nichteinbettungssätze</i>	38
4.2	<i>Einige Abschätzungen</i>	45
4.3	<i>Berechnung von Beispielen</i>	56
5	<i>Schlußbemerkung</i>	62
6	<i>Literatur</i>	63

# 1 Einführung und Literaturübersicht

Die Klasse der verallgemeinerten de Bruijn Graphen wurde zum ersten Mal voneinander unabhängig von J.G.Kuhl, D.K. Pradhan und S.M. Reddy 1980 [KPR80] und M. Imase und M. Itoh 1981 [II81] in Zusammenhang mit dem sogenannten Grad Durchmesser Problem eingeführt. 1983 führten Imase und Itoh [II83] eine ähnliche Graphenklasse, die verallgemeinerten Kautz Graphen ein. Zunächst sollen diese Graphenklassen definiert und ein paar grundlegende Aussagen zur Struktur der verallgemeinerten de Bruijn Graphen gemacht werden.

Der (gerichtete) verallgemeinerte de Bruijn Graph  $G_B(d, n)$  mit natürlichen Parametern  $n$  und  $d$  ist wie folgt definiert:

Seine Eckenmenge  $V$  hat die Mächtigkeit  $n$  und die Ecken werden mit Elementen des  $n$ -elementigen Restklassenringes  $Z_n$  dargestellt, das heißt, es gibt eine bijektive Abbildung von  $Z_n$  nach  $V(G_B(d, n))$ .

Die gerichtete Kantenmenge  $E$  des  $G_B(d, n)$  besteht dann aus allen geordneten Paaren  $(x, y)$  aus  $V \times V$ , für die es ein  $\theta \in \{0, \dots, d-1\}$  gibt mit  $y \equiv dx + \theta$ .

Also  $E(G_B(d, n)) = \{\overrightarrow{xy} : \exists \theta \in \{0, \dots, d-1\} \text{ mit } y \equiv dx + \theta \pmod{n}\}$ .

Ähnlich sind die verallgemeinerten Kautz Graphen  $G_I(d, n)$ , die in der Literatur oft auch Imase Itoh Graph genannt werden, definiert. Im Unterschied zum  $G_B(d, n)$  ist ein geordnetes Paar  $\overrightarrow{xy}$  von Ecken genau dann eine gerichtete Kante (auch: Bogen) des  $G_I(d, n)$ , wenn es ein  $\theta \in \{1, \dots, d\}$  gibt mit  $y \equiv -dx - \theta \pmod{n}$ .

Es ist also  $E(G_I(d, n)) = \{\overrightarrow{xy} : \exists \theta \in \{1, \dots, d\} \text{ mit } y \equiv -dx - \theta \pmod{n}\}$   
 $= \{\overrightarrow{xy} : \exists \theta \in \{0, \dots, d-1\} \text{ mit } y \equiv d(n-1-x) + \theta \pmod{n}\}$ .

Ist  $N \geq 1$  eine natürliche Zahl, so ist auf diese Weise mit  $G_B(d, d^N)$  der (gewöhnliche) de Bruijn Graph  $B(d, N)$  und mit  $G_I(d, d^N + d^{N-1})$  der (gewöhnliche) Kautz Graph  $K(d, N)$  definiert.

Sowohl die verallgemeinerten de Bruijn Graphen  $G_B(d, n)$ , als auch die verallgemeinerten Kautz Graphen  $G_I(d, n)$  sind regulär mit Eingrad = Ausgrad =  $d$ .

## 1.1 Etwas Zahlentheorie und elementare Betrachtungen

Von den nun folgenden Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit häufiger Gebrauch gemacht werden. Sei  $ggT(d, n)$  der größte gemeinsame Teiler von  $d$  und  $n$ . Dann sei:

$$n' := \frac{n}{ggT(d, n)}, \quad d' := \frac{d}{ggT(d, n)} \quad \text{und, falls für } x \in \mathbb{Z}_n : ggT(d, n) | x, \text{ sei } x' := \frac{x}{ggT(d, n)}.$$

Weiterhin sei  $(^k)\Theta$  in folgender Weise definiert:  $x \equiv (^k)\Theta$  gilt genau dann, wenn es ein  $\chi$  aus  $\{0, \dots, d^k - 1\}$  gibt mit:  $x \equiv \chi \pmod{n}$ .

Schließlich sei:  $\Gamma^k(x) = \{y \in V(G_B(d, n)) : \text{es gibt einen (gerichteten) Weg von } x \text{ nach } y \text{ einer Länge } \leq k\}$   
und  $\Gamma^{-k}(x) = \{y \in V(G_B(d, n)) : \text{es gibt einen (gerichteten) Weg von } y \text{ nach } x \text{ einer Länge } \leq k\}$ .

Wenn nicht anders angegeben, wird stets  $\text{mod } n$  gerechnet.

Die Ecken des  $G_B(d, n)$  oder  $G_I(d, n)$ , beziehungsweise Elemente aus  $\mathbb{Z}_n$ , sollen mit lateinischen Buchstaben  $x, y, z$  bezeichnet werden, „Ziffern“, d.h. natürliche Zahlen zwischen 0 und  $d-1$ , mit  $\theta$  oder  $\theta_i$  und ganze Zahlen zwischen  $-(d-1)$  und  $d-1$  schließlich mit kleinen griechischen Buchstaben  $\vartheta, \zeta$  oder  $\eta$ .

Ist  $\mathbb{Z}_n^*$  die Einheitengruppe von  $\mathbb{Z}_n$  und  $x \in \mathbb{Z}_n^*$ , so sei mit  $x^{-1}$  das eindeutig bestimmte Element  $y$  aus  $\mathbb{Z}_n$  bezeichnet, für das  $xy \equiv 1 \pmod{n}$  gilt.

Für  $x \in \mathbb{Z}_n^*$  gilt:  $\mathbb{Z}_n \cong x\mathbb{Z}_n \cong x^{-1}\mathbb{Z}_n$ , wobei  $x\mathbb{Z}_n := \{xy | y \in \mathbb{Z}_n\}$ .

**Lemma 1.1 (Gleichungen)** Seien  $d, x, y \in \mathbb{Z}_n$  und  $n \geq d$ .

- i)  $dx \equiv y \pmod{n} \iff ggT(d, n) | y$  und  $d'x \equiv y' \pmod{n'}$ .
- ii) Die Gleichung  $dx \equiv y \pmod{n}$  hat für  $x$  genau  $ggT(d, n)$  Lösungen, falls:  $ggT(d, n) | y$  und keine, falls:  $ggT(d, n) \nmid y$ .
- iii) Die Gleichung  $dx \equiv \Theta$  hat genau  $d$  Lösungen für  $x$ .

denn: i) Es gilt  $dx \equiv y \pmod{n}$  genau dann, wenn es ein  $a \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $y = dx + an$  und es gibt ein  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $y = dx + an$  genau dann, wenn  $ggT(d, n) | y$  und  $\frac{y}{ggT(d, n)} = \frac{d}{ggT(d, n)}x + a \frac{n}{ggT(d, n)}$ .

- ii) Mit i) gilt  $dx \equiv y \pmod n$  genau dann, wenn  $ggT(d, n) | y$  und  $d'x \equiv y' \pmod{n'}$ .  
 Da  $ggT(d', n') = 1$ , ist dies äquivalent zu:  
 $ggT(d, n) | y$  und  $x \equiv d'^{-1}y' \pmod{n'}$ , was genau dann gilt, wenn  $ggT(d, n) | y$  und  
 $x = d'^{-1}y' + kn' \pmod n$  mit  $0 \leq k < ggT(d, n)$ . Damit folgt die Behauptung.
- iii) folgt mit ii), da  $|\{y \in \{0, \dots, d-1\} : ggT(d, n) | y\}| = d'$ .

**Lemma 1.2 (modulares Rechnen)** Seien  $c, d, x, y \in \mathbb{Z}_n$  und  $n \geq d$ .

- i) Ist  $0 \leq c \leq d$  und  $n \geq d|x| + c$ , dann hat die Gleichung

$$dx \equiv y \pmod n \text{ unter der Bedingung } |y| < c$$

genau dann eine Lösung für  $y$ , wenn  $x = 0$ .

Insbesondere folgt für  $n \geq d^k|x| + d^k$  aus  $d^kx \equiv \pm^{(k)}\Theta : d^kx \equiv 0$ .

- ii) Gilt  $n \geq d^{k+1}$ , dann hat die Gleichung

$$x_0 + x_1d + \dots + x_kd^k \equiv 0 \pmod n, \quad -d < x_i < d,$$

genau die Lösung  $x_0 = \dots = x_k = 0$ .

Insbesondere hat für  $n \geq d^k$  die Gleichung  $x \equiv^{(k)}\Theta$  höchstens eine Lösung  
 $x \equiv \theta_0 + \dots + d^{k-1}\theta_{k-1}$  und dann mit eindeutig bestimmten

$$\theta_0, \dots, \theta_{k-1} \in \{0, \dots, d-1\}.$$

denn : i) Gilt  $dy \equiv x \pmod n$ , dann gibt es ein  $a \in \mathbb{Z} : an = dy - x$  und damit ist:  
 $|an| = |dy - x| < |dy + c| \leq n$ , also  $a = 0$  und  $y = 0$ , da  $|x| < d$ .

- ii) Aus  $x_0 + x_1d + \dots + x_kd^k \equiv 0 \pmod n$  folgt  $x_0 + x_1 + \dots + x_kd^k = an, a \in \mathbb{Z}$ ,  
 und damit  $|an| \leq (1 + \dots + d^k)(d-1) = d^{k+1} - 1 < n$ .  
 Also  $a = 0$  und  $x_0 = \dots = x_k = 0$ .

**Lemma 1.3** i) Ist  $n \geq d$ , hat der  $G_B(d, n)$  genau  $d + ggT(d-1, n) - 1$   
 und der  $G_I(d, n)$  genau  $d - ggT(d+1, n) + 1$  Schlingen.

- ii) Ist  $n \geq d^2$ , enthält der

$G_B(d, n)$  genau  $\frac{1}{2}[d(d-1) + ggT(d-1, n)(ggT(d+1, n) - 1)]$  und der

$G_I(d, n)$  genau  $\frac{1}{2}[(d+1)(d-2) + ggT(d+1, n)(ggT(d-1, n) + 1)]$

Doppelkanten.

iii) Für jedes  $x \in V(G_B(d, n))$  ist:

$$\Gamma^m(x) = \{y : y \equiv d^m x + {}^{(m)}\Theta\} \text{ und } \Gamma^{-m}(x) = \{y : d^m y \equiv x - {}^{(m)}\Theta\}.$$

Für jedes  $x \in V(G_I(d, n))$  ist:

$$\Gamma^m(x) = \begin{cases} \{y : y \equiv d^m x + {}^{(m)}\Theta\} & \text{für gerades } m \\ \{y : y \equiv -d^m(x+1) + {}^{(m)}\Theta\} & \text{für ungerades } m \end{cases}$$

$$\text{und } \Gamma^{-m}(x) = \begin{cases} \{y : d^m y \equiv x - {}^{(m)}\Theta\} & \text{für gerades } m \\ \{y : -d^m y \equiv x + d^m - {}^{(m)}\Theta\} & \text{für ungerades } m \end{cases}$$

Ist  $n \geq d^m$ , dann gilt in beiden Fällen:  $|\Gamma^m| = |\Gamma^{-m}| = d^m$ .

denn : i)  $x$  ist eine Schlinge im  $G_B(d, n)$  genau dann, wenn  $x \equiv dx + \Theta$ , das heißt  $(1-d)x \equiv \Theta$ .

Die Gleichung  $(1-d)x \equiv \Theta$  hat aber genau  $d-1 + \text{ggT}(d-1, n)$  Lösungen.

Analog ist  $x$  genau dann eine Schlinge im  $G_I(d, n)$ , wenn

$x \equiv d(n-1-x) + \Theta$ , das heißt  $(1+d)x \equiv \Theta - d$ .

Die Gleichung  $(1+d)x \equiv \Theta - d$  hat aber genau  $d+1 - \text{ggT}(d+1, n)$  Lösungen.

(Siehe auch [DH88])

ii) Zunächst soll der  $G_B(d, n)$  betrachtet werden.  $x_1 \longleftrightarrow x_2$  ist genau dann eine Doppelkante im  $G_B(d, n)$ , wenn es  $\theta_1$  und  $\theta_2$  gibt, sodaß:  $x_1 \equiv dx_2 + \theta_1$  und  $x_2 \equiv dx_1 + \theta_2$  gilt. Jede Ecke inzidiert mit höchstens einer Doppelkante, denn, gilt zusätzlich  $x_1 \longleftrightarrow y_2$ , das heißt  $x_1 \equiv dy_2 + \tilde{\theta}_2$  und  $y_2 \equiv dx_1 + \tilde{\theta}_1$ , so folgt:  $d\theta_2 + \theta_1 \equiv (1-d^2)x_1 \equiv d\tilde{\theta}_2 + \tilde{\theta}_1$  und damit  $\theta_2 = \tilde{\theta}_2$ , das heißt  $x_2 = y_2$ .

Eine Ecke  $x_1$  inzidiert also genau dann mit genau einer Doppelkante, wenn  $(1-d^2)x_1 \equiv {}^{(2)}\Theta$  ( $\diamond$ ) gilt, sonst mit keiner. Die Gleichung  $(1-d^2)x_1 \equiv {}^{(2)}\Theta$  hat genau  $d^2-1 + \text{ggT}(d^2-1, n)$  Lösungen für  $x_1$ .

Nun ist auch jede Schlinge Lösung einer Gleichung ( $\diamond$ ), da aus  $(1-d)x \equiv \Theta$  folgt:  $(1-d^2)x \equiv d\Theta + \Theta \equiv {}^{(2)}\Theta$ .

Von den Lösungen der Gleichungen ( $\diamond$ ) sind daher die Schlingen abzuziehen. Das ergibt im  $G_B(d, n)$   $d(d-1) + \text{ggT}(d-1, n)(\text{ggT}(d+1, n) - 1)$  paarweise verschiedene an Doppelkanten beteiligte Ecken, womit die Behauptung für den  $G_B(d, n)$  folgt.

Im  $G_I(d, n)$  inzidiert  $x$  genau dann mit einer Doppelkante, wenn

$(1-d^2)x \equiv d^2 - d\Theta + \Theta - d \equiv d(d-\Theta) - (d-\Theta) \equiv {}^{(2)}\Theta$  gilt.

Der Abzug der Schlingen von den  $d^2-1 + \text{ggT}(d^2-1, n)$  Lösungen der Gleichung ergibt die behaupteten  $(d+1)(d-2) + \text{ggT}(d^2-1, n) + \text{ggT}(d+1, n)$  paarweise verschiedenen mit Doppelkanten inzidenten Ecken des  $G_I(d, n)$ .

iii) folgt aus wiederholter Anwendung der definierenden Kantengleichungen.

## 1.2 Das Grad Durchmesser Problem

Das Grad Durchmesser Problem hat vor allen Dingen für die Frage nach für Netzwerke geeigneten Graphen eine Bedeutung. Graphen, die im Sinne dieses Problems günstig sind, modellieren Netzwerke, die mit wenig Kanten die Knoten mit kurzen Wegen verbinden. Das Grad Durchmesser Problem ist folgenderweise definiert:

Grad Durchmesser ( $d-k$ -) Problem: Zu gegebenen natürlichen Zahlen  $d$  und  $k$  finde einen (un-)gerichteten Graphen mit Höchstgrad  $d$ , Durchmesser  $k$  und maximaler Eckenzahl  $n$ .

Mit den Buchstaben  $d$ ,  $k$  und  $n$  sollen im Weiteren stets der Höchstgrad, der Durchmesser, beziehungsweise die Eckenzahl eines Graphen bezeichnet werden.

Durch Betrachtung eines aufspannenden kürzeste Wege Baumes eines Graphen läßt sich eine triviale obere Schranke für die Eckenzahl  $n$ , die sogenannte Moore-Schranke  $n_M$ , finden. Sie beträgt:

$$n_M = \begin{cases} \frac{d(d-1)^k - 2}{d-2}, & d \geq 3 \\ 2k + 1, & d = 2 \end{cases} \quad (\text{ungerichtet}) \quad n_M = \begin{cases} \frac{d^{k+1} - 1}{d-1}, & d \geq 2 \\ k + 1, & d = 1 \end{cases} \quad (\text{gerichtet})$$

Im Folgenden soll nur noch der gerichtete Fall betrachtet werden.

Ein Graph mit Eckenzahl  $n_M$  heißt Moore Graph. Ist  $\mathcal{G}$  ein gerichteter Graph mit Eckenzahl  $n$ , Höchstgrad  $d \geq 2$  und Durchmesser  $k$ , so gilt also:

$$n \leq n_M = \frac{d^{k+1} - 1}{d-1} \quad \text{und damit: } k \geq \lceil \log_d(n(d-1) + 1) \rceil - 1$$

W.G. Bridges und S. Toueg haben gezeigt, daß nur triviale gerichtete Moore Graphen, das heißt Moore Graphen mit Höchstgrad 1 (gerichtete Kreise) oder Durchmesser 1 (vollständige Digraphen) existieren [BT80]. Unter dieser Voraussetzung erweist sich eine Umformulierung des Grad Durchmesser Problems als günstig. Als  $d-k$ -Graph sei ein Graph bezeichnet, für den  $k = \lceil \log_d(n(d-1) + 1) \rceil - 1$  gilt. Die Klasse der  $d-k$ -Graphen umfaßt also die der Moore Graphen. Entsprechend sei das  $d-k$ -Graphen Problem formuliert:

$d-k$ -Graphen Problem: Unter allen Graphen mit Eckenzahl  $n$  und Höchstgrad  $d$  finde einen mit minimalem Durchmesser  $k$ .

Weitere Größen, die mit Eckenzahl, Höchstgrad und Durchmesser von Graphen in Beziehung stehen, sind die Zusammenhangszahlen. Sei mit  $c_n$  und  $c_e$  die (starke)

Ecken-, beziehungsweise Kantenzusammenhangszahl bezeichnet und mit  $\delta$  der Minimalgrad eines Graphen, so gilt zunächst die triviale Beziehung:

$$c_n \leq c_e \leq \delta \leq d.$$

M. Imase, K. Okada und T. Soneoka haben folgende Aussage gezeigt:

$$\text{Gilt } c_n \neq 0, 0 < c_e < \delta \text{ und } n \geq c_n + 2,$$

$$\text{dann: } n \leq c_n \left( \frac{d^k - 1}{d - 1} + d \right) \text{ und } n \leq c_e \left( \frac{d^{k-1} - 1}{d - 1} + d + 1 \right) \quad [\text{IOS85}]$$

Als Folgerungen formulieren Imase, Okada und Soneoka folgende Beziehungen von Eckenzahl, Höchstgrad, Durchmesser und Zusammenhangszahlen eines gerichteten stark zusammenhängenden Graphen:

$$\text{Ist } n \geq d^k + d^2 - d, \text{ dann gilt } c_n = d,$$

$$\text{Ist } n \geq (d - 2) \left( \frac{d^k - 1}{d - 1} + d \right), \text{ dann auch } c_n \geq d - 1.$$

$$\text{Gilt } \delta = d \text{ und } n \geq d^{k-1} + d^2 - 1, \text{ dann gilt auch } c_e = d,$$

$$\text{gilt } \delta \geq d \text{ und } n \geq (d - 2) \left( \frac{d^{k-1} - 1}{d - 1} + d + 1 \right), \text{ dann ist } c_e \geq d - 1.$$

M. Imase und M. Itoh führen in zwei Arbeiten 1981 und 1983 die verallgemeinerten de Bruijn Graphen [II81], beziehungsweise die verallgemeinerten Kautz Graphen (Imase Itoh Graphen) [II83] als Quasilösungen des  $d$ - $k$ -Graphen Problems ein, das heißt als Graphen, die die  $d$ - $k$ -Graphen Schranke um höchstens 1 verfehlen. Unabhängig davon wird in [KPR80] der verallgemeinerte de Bruijn Graph in diesem Zusammenhang eingeführt. Imase und Itoh zeigen für die Durchmesser  $k(G_B(d, n))$  und  $k(G_I(d, n))$ :

$$k(G_B(d, n)) = \lceil \log_d n \rceil, \quad k(G_I(d, n)) \leq \lceil \log_d n \rceil$$

$$\text{und } k(G_I(d, n)) = m \text{ falls } n = d^m + d^{m-b}, \text{ mit ungeradem } b \leq m$$

Ist  $n = d^m + d^{m-b}$  für ein ungerades  $b \leq m$ , dann ist  $k(G_I(d, n)) = \lceil \log_d n \rceil - 1$ ,  
ist  $n > d^m + d^{m-1}$ , dann ist  $k(G_I(d, n)) = \lceil \log_d n \rceil$ .

Anzumerken bleibt hier, daß die ungerichteten verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen keine Quasilösungen des entsprechenden ungerichteten  $d$ - $k$ -Graphen Problems sind. Überhaupt stellen sich die hier beschriebenen Fragestellungen im ungerichteten Fall als weitaus schwieriger dar.

Imase, Okada und Soneoka zeigen in der schon oben erwähnten Arbeit [IOS85] für die Eckenzusammenhangszahlen:

$$\text{Gilt } k \geq 4, \text{ dann ist: } c_n(G_B(d, n)) = c_e(G_B(d, n)) = d - 1$$

und  $c_n(G_I(d, n)) \geq d - 1$  mit Gleichheit, falls  $(d + 1) \nmid n$ .

D.Z. Du und F.K. Hwang zeigen in [DH88], daß für den Fall  $(d + 1) \mid n$  und  $ggT(d, n) = 1$  für die Kantenzusammenhangszahl des  $G_B^{\pm}(d, n)$   $c_e(G_B^{\pm}(d, n)) = d$  gilt. N. Homobono und C. Peyrat vervollständigen schließlich diese Ergebnisse für große Durchmesser  $k$ , indem sie zeigen, daß:

$$c_n(G_B^{\pm}(d, n)) = d - 1, \text{ falls } ggT(d, n) = 1$$

und  $c_n(G_B^{\pm}(d, n)) = d$ , falls  $k \geq 5$ ,  $(d + 1) \mid n$  und  $ggT(d, n) \neq 1$ .

N. Homobono zeigt in [H88] noch folgendes Ergebnis für die ungerichteten verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen  $UG_B(d, n)$  und  $UG_I(d, n)$ :

$$\text{Gilt } k \geq 5 \text{ und } n > d^k, \text{ dann ist } c_n(UG_I(d, n)) = c_e(UG_I(d, n)) = \delta$$

$$\text{und } c_n(UG_B(d, n)) = c_e(UG_B(d, n)) = 2d - 2 = \delta.$$

### 1.3 Einbettungen und Modifikationen

Eine für Graphen, die zur Modellierung von Rechnernetzwerken verwendet werden sollen, interessante Frage ist die nach Möglichkeiten von Einbettungen anderer Graphen in diese Netzwerkmodelle. Werden zum Beispiel die wegen ihrer hohen „Dichte“ dafür gut geeigneten de Bruijn oder Kautz Graphen zur Modellierung der Vernetzung von Prozessoren in Parallelrechnern verwendet, wird es notwendig sein, auf anderen Graphen, wie Wegen oder Bäumen oder auch komplexeren Strukturen, konzipierte Algorithmen darin einzupassen. Es soll zunächst der Begriff der Einbettung definiert werden.

**Definition 1**  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  seien ungerichtete Graphen. Ist  $\mathcal{G}$  oder  $\mathcal{H}$  gerichtet, wird dabei der entsprechende ungerichtete Graph, das heißt die vollständige Orientierung von  $\mathcal{G}$  beziehungsweise  $\mathcal{H}$  betrachtet.

- b + v
- i)  $\mathcal{G}$  heißt in  $\mathcal{H}$  einbettbar, im Folgenden beschrieben durch  $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ , falls es injektive Abbildungen  $\Phi_V : V(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{H})$  und  $\Phi_E : E(\mathcal{G}) \rightarrow E(\mathcal{H})$  gibt, für die gilt:  $xy \in E(\mathcal{G}) \implies \Phi_E(xy) = \Phi_V(x)\Phi_V(y)$ .
  - ii) Ist  $\Phi_V$  bijektiv, dann heißt  $\mathcal{G}$  aufspannender Teilgraph von  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ .
  - iii) Ist obendrein  $\Phi_E$  bijektiv, heißen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  isomorph:  $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$ .

Die ersten Einbettungsergebnisse erscheinen in der oben schon erwähnten Arbeit „Generalized de Bruijn Digraphs“, von D.Z. Du und F.K. Hwang [DH88]. Sie zeigen, daß sowohl  $G_B(d, n)$  als auch  $G_I(d, n)$  hamiltonsch sind, falls  $\text{ggT}(d, n) > 1$  gilt. Sie zeigen darüber hinaus, daß der  $G_B(2, n)$  für ungerade  $n$  keinen Hamiltonschen Kreis enthält, dafür aber einen Hamiltonschen Weg von 0 nach  $n - 1$  und einen von  $n - 1$  nach 0 genau dann, wenn 2 eine Primitivwurzel in  $\mathbb{Z}_n$  ist. Da 0 und  $n - 1$  im  $G_B(d, n)$  genau die beiden Ecken sind, die mit einer Schlinge inzidieren, ist dies unter den oben angesprochenen Gesichtspunkten eine durchaus interessante Eigenschaft. Da es eine Primitivwurzel mod n nur dann gibt, wenn  $n$  eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist, gibt es einen Hamiltonschen Weg von 0 nach  $n - 1$  im  $G_B(2, n)$  höchstens dann, wenn  $n = p^m$  für eine Primzahl  $p > 2$  und ein  $m \geq 1$  gilt ([NZ80]). In der 1991 veröffentlichten Arbeit „The Hamiltonian Property of Generalized de Bruijn Digraphs“ vervollständigen D.Z. Du, D.F. Hsu, F.K. Hwang und X.M. Zhang diese Ergebnisse, indem sie zeigen, daß für  $d \geq 3$  sowohl der  $G_B(d, n)$  als auch der  $G_I(d, n)$  einen Hamiltonschen Kreis enthält ([DHHZ91]). F.K. Hwang zeigt in einem Anhang derselben Arbeit, daß der  $G_I(2, n)$  für ungerades  $n$  genau dann hamiltonsch ist, wenn  $n = 3^m$  für eine natürliche Zahl  $m$  gilt.

Als weitere Einbettungseigenschaft zeigen Du und Hwang in [DH88], daß der  $G_B(d, n)$  und der  $G_I(d, n)$  für jedes  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  einen vollständigen ausbalancierten  $d$ -nären Baum der Höhe  $\lceil \log_d n \rceil$  mit Wurzel  $x$  enthalten, in dem jede Ecke dieser Graphen als Blätter auf der  $\lceil \log_d n \rceil$ -ten Ebene, das heißt mit Abstand  $\lceil \log_d n \rceil$  von der Wurzel erscheinen. Als vollständigen ausbalancierten  $d$ -nären Baum bezeichnen sie einen Baum, in dem jeder innerer Knoten den Grad  $d+1$  hat und jedes Blatt eine Entfernung von der Wurzel, die um höchstens 1 sich von der Höhe unterscheidet.

Als Folgerung zeigen sie die sogenannte „Self-routing“ Eigenschaft der verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen. Ein Graph mit Durchmesser  $k$  hat diese „Self-routing“ Eigenschaft, wenn für je zwei Ecken  $x$  und  $y$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  mit einer Länge  $\leq k$  nur aus Kenntnis dieser beiden Ecken bestimmt werden kann.

Zum Ende dieser Literaturbetrachtungen soll noch erwähnt werden, daß auch Modifikationen der verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen zur Netzwerkmodellierung von Interesse sein können und auch betrachtet werden. Reddy, Pradhan und Kuhl führen in [RPK80] als Variation des  $G_B(d, n)$  einen Graphen  $D_n$  ein, der aus dem  $G_B(2, n)$  hervorgeht, indem für gerade  $n$  die beiden Schlingen, die mit 0 beziehungsweise  $n-1$  inzidieren, durch je einen Weg von 0 nach  $n-1$  und von  $n-1$  nach 0 ersetzt werden. Für ungerade  $n$  wird der  $D_n$  durch Identifikation der Ecken 0 und  $n-1$  im  $D_{n+1}$  konstruiert.

D.Z. Du, D.F. Hsu und G.W. Peck führen in [DHP92] einen modifizierten „Consecutive- $d$ “ Digraphen  $G(d, n, q, r)$  ein. Die Ecken des  $G(d, n, q, r)$  werden wieder mit den Elementen des  $Z_n$  bezeichnet und zwei Ecken  $x$  und  $y$  sind durch einen Bogen von  $x$  nach  $y$  verbunden, wenn  $y \in \{qx + r, \dots, qx + r + d - 1 \pmod n\}$ . Der  $G(d, n, q, r)$  ist eine Verallgemeinerung der verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen. D.Z. Du, D.F. Hsu und G.W. Peck modifizieren diese Graphen, indem sie Schlingen ersetzen durch Wege, die die mit Schlingen inzidenten Ecken miteinander verbinden (siehe auch [INS90]).

Es ist in der Regel leicht einzusehen, daß diese Modifikationen gegenüber den verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen Vorteile in Bezug auf Durchmesser, Zusammenhang oder Hamiltonscher Eigenschaften haben; vor allen Dingen ist das Verbinden der schlingentragenden Ecken in einem gerichteten Kreis und das anschließende Weglassen der Schlingen eine naheliegende Modifikation.

Hiermit soll nun der Exkurs durch die Literatur über die verallgemeinerten de Bruijn und Kautz Graphen beendet werden.

## 2 Vierkreise

### 2.1 Einbettung von Produktgraphen

Im Folgenden soll die Frage untersucht werden, wann, das heißt bei welchen Parametern  $d$  und  $n$ , kartesische Produkte von einfachen, zusammenhängenden und nichttrivialen Graphen sich nicht als aufspannende Teilgraphen in den verallgemeinerten de Bruijn Graphen  $G_B(d, n)$  einbetten lassen. Einige für die Darstellung von Netzwerken von parallel rechnenden Strukturen, wie zum Beispiel parallele Algorithmen oder Parallelrechner, geeignete Graphen lassen sich als Produkt einfacher, zusammenhängender, nichttrivialer Graphen beschreiben. Beispiele hierfür sind Gitter, Hypercubes und Tori.

Für  $m \geq 2$  und einfache und zusammenhängende Graphen  $G_1, \dots, G_m$  heißt  $\mathcal{G}$  ein kartesisches Produkt von  $G_1, \dots, G_m$ ,  $\mathcal{G} = G_1 \times \dots \times G_m$ , falls:

- 6fV
- $V(\mathcal{G}) = V(G_1) \times \dots \times V(G_m)$  und
  - $(x_1, \dots, x_m)(y_1, \dots, y_m) \in E(\mathcal{G}) \iff \exists i \in \{1, \dots, m\} : \forall j \neq i : x_j = y_j \text{ und } x_i y_i \in E(G_i)$ .

Gilt für einen Graphen  $\mathcal{G}$ :  $V(\mathcal{G}) = \emptyset$  oder  $E(\mathcal{G}) = \emptyset$ , dann heißt  $\mathcal{G}$  trivial.

Mit  $P_i$  soll ein einfacher Weg  $x_0 \dots x_i$  der Länge  $i$  bezeichnet werden, mit  $\mathcal{M}(i_1, \dots, i_m)$  ein  $m$ -dimensionales Gitter  $\mathcal{M}(i_1, \dots, i_m) \cong P_{i_1} \times \dots \times P_{i_m}$  und mit  $\mathcal{K}_2^m$  ein  $m$ -dimensionaler Hyperwürfel  $\mathcal{K}_2^m \cong P_1^m$ .

Statt  $|V(\mathcal{G})|$  wird meistens kurz  $|\mathcal{G}|$  geschrieben.

In der Arbeit „Embedding Cartesian Products of Graphs into de Bruijn Graphs“ von T. Andreae, M. Nölle und G. Schreiber ([ANS94]) wurde untersucht, bei welcher Wahl von Parametern  $n$  und  $d$  sich Graphenprodukte nicht in den (gewöhnlichen) de Bruijn Graphen  $B(d, n)$  als aufspannende Teilgraphen einbetten lassen. Sie zeigen, daß für  $m \geq 2$  ein Produkt  $\mathcal{G} = G_1 \times \dots \times G_m$  einfacher, zusammenhängender und nichttrivialer Graphen  $G_i$  kein aufspannender Teilgraph des  $B(d, n)$  ist, falls:

- $m = 2$  und  $n \geq d^4$  ist,
- $m = 2$  und  $n \geq d^3$  gilt,  $G_1$  kein Weg ist und  $G_2$  keine Ecke vom Grad 1 hat
- oder  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$  gilt.

Im Vergleich zu gewöhnlichen de Bruijn Graphen haben verallgemeinerte de Bruijn Graphen den Vorteil, daß sie sich auf beliebigen Eckenzahlen realisieren lassen. Allerdings sind diese nicht so einfach zu handhaben, wobei der Fall  $d|n$  noch am ehesten ähnlich dem der gewöhnlichen de Bruijn Graphen ( $n = d^k$ ) behandelt werden

kann, während der allgemeine Fall  $d \nmid n$  einiger zusätzlicher Betrachtungen bedarf. Im gewöhnlichen de Bruijn Graphen  $B(d, N) = G_B(d, d^N)$  lassen sich die Ecken als  $d$ -adische Zahlen darstellen:  $x = \langle x_{N-1}, \dots, x_0 \rangle$ , sodaß jede Ecke  $y$  aus  $\Gamma^1(x)$  eine Darstellung  $y = \langle x_{N-2}, \dots, x_0, \theta \rangle$  und jede Ecke  $w \in \Gamma^{-1}(x)$  eine Darstellung  $w = \langle \theta, x_{N-1}, \dots, x_1 \rangle$ ,  $\theta \in \{0, \dots, d-1\}$ , hat. Diese Darstellungsmöglichkeit gibt es im verallgemeinerten Fall nicht mehr, findet aber für wachsende  $d$ -Potenzen, die als Teiler in  $n$  vorhanden sind, eine zunehmende Annäherung, wie in den folgenden drei Aussagen zusammengefaßt:

Sei  $k = \lceil \log_d n \rceil$ ,  $x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i d^i$ ,  $y = \sum_{i=0}^{k-1} y_i d^i$  mit  $x_i, y_i \in \{0, \dots, d-1\}$  und es gelte  $d^m | n$  für ein  $m \geq 0$ . Es gilt dann:

$$dx + \theta \equiv \begin{cases} \theta + \sum_{i=1}^{k-1} x_{i-1} d^i & \text{falls } n = d^k \\ \theta + \sum_{i=1}^{k-1} x_{i-1} d^i + x_{k-1} d^k & \text{sonst} \end{cases}$$

$x - y \equiv \pm \Theta \implies x_0 - y_0 \equiv \pm \Theta$ , falls  $m \geq 1$ , und  $x_i = y_i$  für  $1 \leq i \leq m-1$ , falls  $m \geq 2$

$d(x - y) \equiv \pm \Theta \implies dx \equiv dy$ , falls  $m \geq 1$ , und  $x_i = y_i$  für  $0 \leq i \leq m-2$ , falls  $m \geq 2$

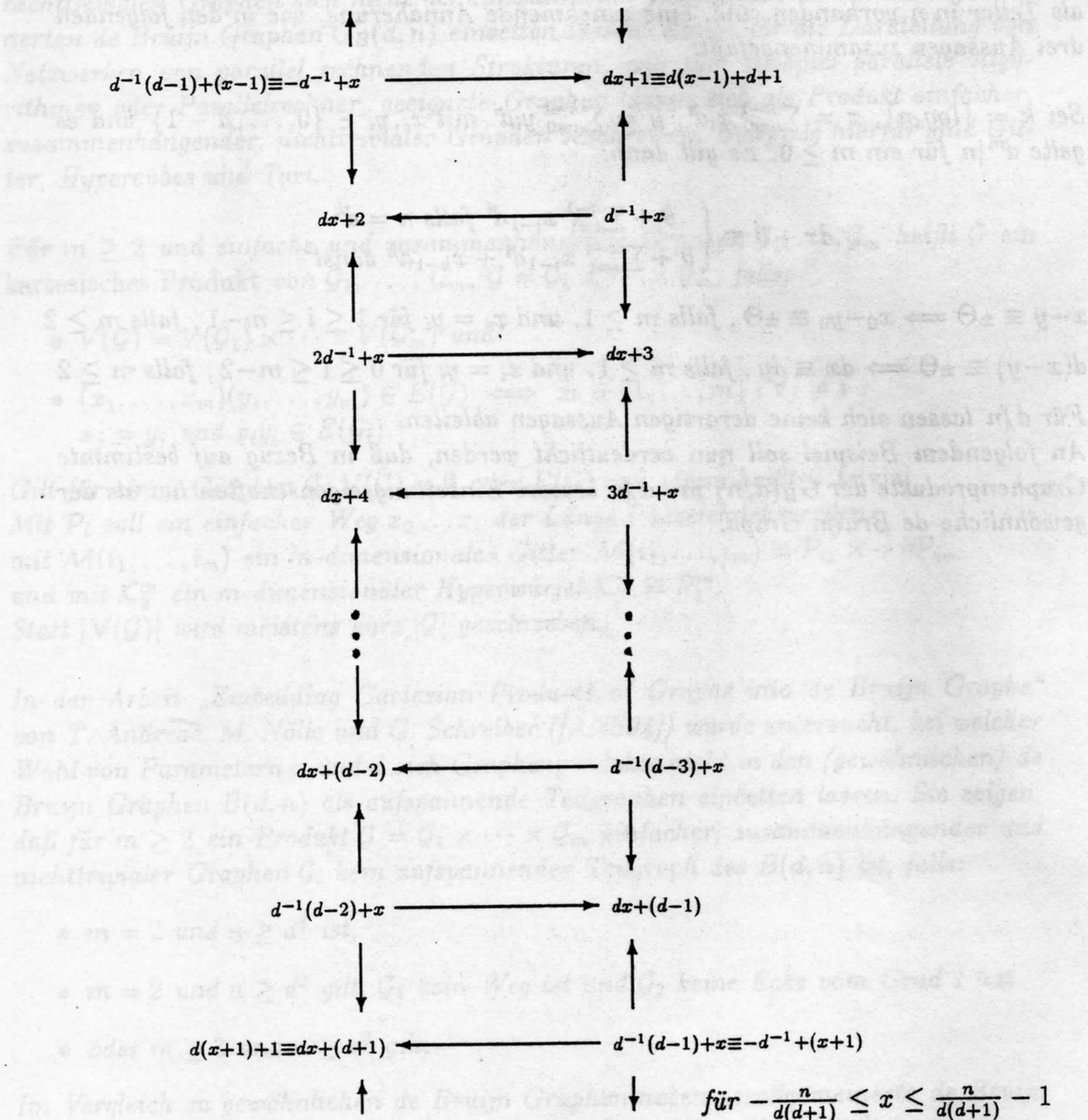
Für  $d \nmid n$  lassen sich keine derartigen Aussagen ableiten.

An folgendem Beispiel soll nun verdeutlicht werden, daß in Bezug auf bestimmte Graphenprodukte der  $G_B(d, n)$  mit  $d \nmid n$  bessere Einbettungseigenschaften hat als der gewöhnliche de Bruijn Graph.

Beispiel: Gilt  $d \geq 4$ ,  $n \geq d^4$  und  $ggT(d, n) = 1$ , dann ist:

$$\mathcal{M}(2, j) \subset G_B(d, n) \text{ mit } j \geq \frac{2(d-1)}{d(d+1)}n - 2d$$

Um dies zu zeigen wird eine Einbettung angegeben:



Die beiden Sprossen  $\frac{n}{d+1} + 1 \leftarrow \frac{n}{d(d+1)} - d^{-1}$  und  $1 - \frac{n}{d+1} \leftarrow -\frac{n}{d(d+1)} - d^{-1}$ , das ist die erste und die letzte, werden dabei weggelassen.

Daß auf diese Weise die in der Leiter benachbarten Ecken auch in der Einbettung in den  $G_B(d, n)$  inzidieren, ist klar.

Es bleibt noch zu zeigen, daß in der obigen Einbettung keine Ecke mehrfach vorkommt. Dazu ist zunächst festzustellen, daß es in dieser Einbettung zwei Typen von Ecken gibt: den Typ  $dx + \eta$  und den Typ  $d^{-1}\eta + x$ , wobei  $1 \leq \eta \leq d-1$  und  $-\frac{n}{d(d+1)} \leq x \leq \frac{n}{d(d+1)} - 1$  gilt.

• Aus  $dx_1 + \eta_1 \equiv dx_2 + \eta_2$  folgt  $d(x_1 - x_2) \equiv \eta_2 - \eta_1$ , da  $n > 2(\frac{n}{d+1} + d - 1)$ .  
Damit gilt dann:  $\eta_1 = \eta_2$  und  $x_1 = x_2$ , da  $\text{ggT}(d, n) = 1$ .

• Aus  $d^{-1}\eta_1 + x_1 \equiv d^{-1}\eta_2 + x_2$  folgt genauso  $\eta_1 = \eta_2$  und  $x_1 = x_2$ .

• Aus  $dx_1 + \eta_1 \equiv d^{-1}\eta_2 + x_2$  folgt  $d^2x_1 - dx_2 + d\eta_1 - \eta_2 \equiv 0$  und damit:

$$\eta_2 = 0, \text{ falls } 0 \leq d^2x_1 - dx_2 + d^2 - 1 < n \text{ oder } 0 \geq d^2x_1 - dx_2 + d > -n.$$

Da aber  $-\frac{n}{d(d+1)} \leq x_1, x_2 \leq \frac{n}{d(d+1)} - 1$ , gilt tatsächlich

$$0 \leq d^2x_1 - dx_2 + d^2 - 1 \leq d^2 \left( \frac{n}{d(d+1)} - 1 \right) + d \frac{n}{d(d+1)} + d^2 - 1 = n - 1 < n$$

$$\text{oder } 0 \geq d^2x_1 - dx_2 + d \geq -d^2 \frac{n}{d(d+1)} - d \frac{n}{d(d+1)} + d = -n + d > -n.$$

Damit folgt dann  $\eta_2 = 0$ , im Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Zu bemerken ist an dieser Stelle noch, daß die zur Einbettung benutzten Vierkreise sämtlich vom (später definierten) Typ 1 sind.

Für die so eingebettete Leiter  $\mathcal{M}(2, j)$  ist dann:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{V}(\mathcal{M}(2, j))| = 2(d-1) \left\lfloor \frac{n}{d(d+1)} \right\rfloor - 2 \geq \frac{2n(d-1)}{d(d+1)} - 2d.$$

Ist  $k \geq 5$ , so hat jede in den  $G_B(d, d^k)$  eingebettete Leiter  $\mathcal{L}$  höchstens die Länge  $2d$ , also maximal  $4d$  Ecken (siehe [HOS92]).

$$\text{Damit gilt: } \frac{1}{n} |\mathbf{V}(\mathcal{L})| \leq 4 \frac{1}{d^{k-1}} \text{ mit } n = d^k.$$

Mit der eben beschriebenen Einbettung ist aber  $\mathcal{M}(2, j) \subset G_B(d, d^k \pm 1)$  und

$$\frac{1}{n} |\mathbf{V}(\mathcal{M}(2, j))| \geq 4 \left( \frac{1}{d} - \frac{2}{d^2} \right) \text{ mit } n = d^k + 1 \text{ oder } n = d^k - 1$$

Für  $k = 5$  und  $d = 5$  zum Beispiel bedeutet das, daß in den  $G_B(5, n)$  mit  $n \in \{3124, 3126\}$  eine Leiter eingebettet werden kann, deren Eckenzahl den  $\frac{12}{25}$ -ten Teil des de Bruijn Graphen beträgt, während der  $G_B(5, 3125)$  eine Leiter mit höchstens dem  $\frac{4}{625}$ -ten Teil seiner Eckenzahl enthält.

## 2.2 Vier Vierkreis Lemmata

Jetzt zu den Nichteinbettungsaussagen, die in der vorliegenden Arbeit hergeleitet werden sollen. Wie in [ANS94] soll dies durch ein Studium der Vierkreise, das heißt Kreise der Länge 4, erreicht werden, weswegen zum Beweis der beiden im vierten Kapitel formulierten Hauptsätze zunächst vier Lemmata über Vierkreise im verallgemeinerten de Bruijn Graphen  $G_B(d, n)$  formuliert und gezeigt werden.

Im Folgenden sei immer  $d \geq 2$  und  $n \geq d^2$ .

**Definition 2** Sei  $d \geq 2$ ,  $G_B(d, n)$  der (gerichtete) de Bruijn Graph vom Grad  $d$  auf  $n$  Ecken und  $C := (x_1, x_2, x_3, x_4) \subset G_B(d, n)$  ein 4-Kreis. Ist  $k$  die Länge des längsten gerichteten Weges in  $C$ , so heißt  $C$  vom Typ  $k$ .

Enthält  $C$  eine oder mehrere Doppelkanten, dann gibt es Vierkreise  $C_1, \dots, C_j$ , die nur einfache Kanten enthalten, sodaß  $C = C_1 \cup \dots \cup C_j$ . Gibt es dann ein  $i \in \{1, \dots, j\}$ , für das  $C_i$  vom Typ  $k$  ist, so heiße auch  $C$  vom Typ  $k$ .

Enthält  $C$  keine Doppelkante und ist vom Typ  $k$ , so heißt  $C$  ein echter Typ  $k$  Kreis.

**Typ 1:**  $x_1 \rightarrow x_2 \leftarrow x_3 \rightarrow x_4 \leftarrow x_1$

Es ist  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta \equiv dx_3 + \Theta$  und  $x_4 \equiv dx_1 + \Theta \equiv dx_3 + \Theta$

**Typ 2:**  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \leftarrow x_4 \leftarrow x_1$

Es ist  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta, x_4 \equiv dx_1 + \Theta$  und  $x_3 \equiv dx_2 + \Theta \equiv dx_4 + \Theta$

**Typ 3:**  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \leftarrow x_1$

Es ist  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta, x_3 \equiv dx_2 + \Theta$  und  $x_4 \equiv dx_1 + \Theta \equiv dx_3 + \Theta$

**Typ 4:**  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1$

Es ist  $x_1 \equiv dx_4 + \Theta, x_4 \equiv dx_3 + \Theta, x_3 \equiv dx_2 + \Theta$  und  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta$

**Lemma 2.1** i) Gilt  $d|n$ , so folgt aus  $d(x - y) \equiv \pm\Theta : dx \equiv dy$ .

ii) Ist  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  ein Typ 1 oder Typ 3 Kreis im  $G_B(d, n)$ ,  
so gilt :  $x_1 - x_3 \equiv \pm\Theta$  und  $d(x_2 - x_4) \equiv \pm\Theta$   
oder  $d(x_1 - x_3) \equiv \pm\Theta$  und  $x_2 - x_4 \equiv \pm\Theta$ .

denn: i) folgt aus Lemma 1.1 ii).

ii) Sei o.E.  $x_4 \leftarrow x_1 \rightarrow x_2$ , also  $x_4 \equiv dx_1 + \Theta$  und  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta$ .  
Dann ist  $x_4 - x_2 \equiv \pm\Theta$  und  $x_3 \rightarrow x_4$  oder  $x_3 \rightarrow x_2$ ,  
also  $x_4 \equiv dx_3 + \Theta$  oder  $x_2 \equiv dx_3 + \Theta$  und damit  $d(x_3 - x_1) \equiv \pm\Theta$ .

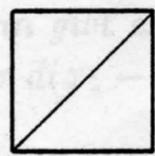
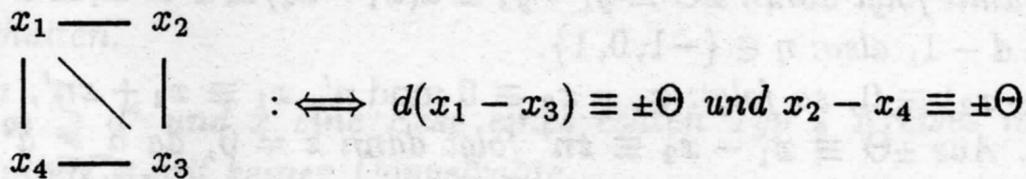
Dafür soll folgende Schreibweise eingeführt werden:

**Definition 3** Sei  $m \geq 2$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m$  ein Produkt einfacher, zusammenhängender und nichttrivialer Graphen und  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$ .

$S = (V(\mathcal{G}), E(G_B(d, n)) \cap E(\mathcal{G}), D)$  heißt ein Schema von  $\mathcal{G}$ , falls:

- $D \subset V^2(\mathcal{G})$  und
- aus  $x_1, x_3 \in D$  folgt, daß sich  $x_1$  und  $x_3$  auf einem Vierkreis  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  gegenüberliegen und  $d(x_1 - x_3) \equiv \pm\Theta$  und  $x_2 - x_4 \equiv \pm\Theta$  gilt.

Die Elemente aus  $D$  werden als dünne Linien dargestellt:



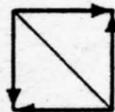
$: \iff$

Für je zwei Paare gegenüberliegender Ecken  $(x_1, x_3)$  und  $(x_2, x_4)$  in  $C$  gilt:  
 $d(x_1 - x_3) \equiv \pm\Theta$  und  $x_2 - x_4 \equiv \pm\Theta$   
oder umgekehrt

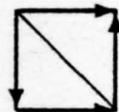
Aus



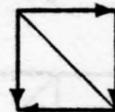
folgt also



oder



oder



Ist  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$  und  $S = (V, E, D)$  ein Schema, dann heißt  $\mathcal{G} \cong S$ , falls es ein  $D$  mit den genannten Eigenschaften gibt.

**Lemma 2.2** Der  $G_B(n, d)$  enthält keinen Typ 2 Kreis.

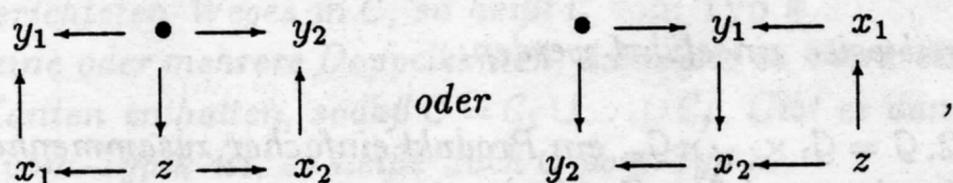
denn: Sei  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \leftarrow x_4 \leftarrow x_1$  ein Typ 2-Kreis.

Dann ist  $dx_2 + \Theta \equiv x_3 \equiv dx_4 + \Theta$ ,  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta$  und  $x_4 \equiv dx_1 + \Theta$ .

Also gilt:  $\pm\Theta \equiv d(x_2 - x_4) \equiv \pm d\Theta$  und damit  $x_2 = x_4$ , da  $n > d^2 - 1$ , ein Widerspruch. Lemma 2.2 kann als Spezialfall von Lemma 1.3 iii) mit  $m = 2$  betrachtet werden.

**Lemma 2.3** i) Gilt  $d|n$ , so ist jeder Typ 3 Kreis auch vom Typ 1.

ii) Gilt  $n \geq d^2 + d - 1$  und:



dann ist  $x_2 - x_1 \equiv \pm 1$ .

denn: i) Sei  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \leftarrow x_1$  ein Typ 3 Kreis.

Dann gilt mit Lemma 2.1 i):  $dx_1 \equiv dx_3$  und damit:

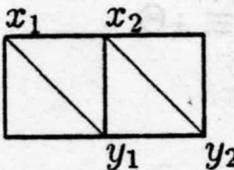
$x_2 \equiv dx_1 + \Theta \equiv dx_3 + \Theta$ , also  $x_3 \rightarrow x_2$ .

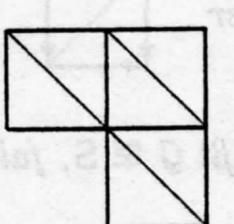
ii) In beiden Fällen gilt:  $y_1 \equiv dx_1 + \Theta$ ,  $y_2 \equiv dx_2 + \Theta$ ,  $x_1 \equiv dz + \Theta$  und  $x_2 \equiv dz + \Theta$ .

Also gibt es ein  $\eta \in \{-(d-1), \dots, d-1\}$  mit:  $x_1 - x_2 \equiv \eta$  und es ist  $y_1 - y_2 \equiv \pm\Theta$ . Damit folgt dann:  $\pm\Theta \equiv y_1 - y_2 \equiv d(x_1 - x_2) \pm \Theta \equiv d\eta \pm \Theta$  und, da  $n > d^2 - 1 + d - 1$ , also:  $\eta \in \{-1, 0, 1\}$ .

Gilt nun:  $d(x_1 - x_2) \equiv 0$ , so folgt:  $x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{n'}$ ,  $x_1 \equiv x_2 + zn'$ , wobei  $|z| \leq \text{ggT}(d, n)$ . Aus  $\pm\Theta \equiv x_1 - x_2 \equiv zn'$  folgt dann  $z = 0$ , da  $n \geq d^2$  und damit:  $|zn' + d - 1| \leq n - n' + d - 1 \leq n - 1$ . Es folgt  $x_1 = x_2$ , ein Widerspruch.

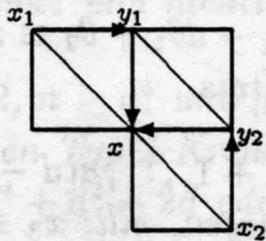
**Korollar 2.3.1** Sei  $n \geq d^3$ .

i) Gilt   $\subset G_B(d, n)$ , dann gilt:  $x_1 \rightarrow x_2$  und  $y_2 \rightarrow y_1$ .

ii)   $\not\subset G_B(d, n)$ .

denn: i) Es gilt  $d(x_1 - y_1) \equiv \pm\Theta$  und  $d(x_2 - y_2) \equiv \pm\Theta$ . Sei zunächst  $x_1 \equiv dx_2 + \Theta$  und  $y_1 \equiv y_2 + \Theta$  (1) oder  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta$  und  $y_2 \equiv y_1 + \Theta$  (2).  
 Im ersten Fall folgt dann:  $\pm\Theta \equiv d(x_1 - y_1) \equiv d^2(x_2 - y_2) \pm d\Theta \equiv \pm d\Theta \pm d\Theta$ , also  $dx_1 \equiv dy_1$ , denn es ist  $n \geq d^3 > 2d^2 - d - 1$ .  
 Da  $x_1 - y_1 \equiv d(x_2 - y_2) \pm \Theta \equiv \pm\Theta \pm \Theta$  gilt, folgt  $x_1 = y_1$ , ein Widerspruch.  
 Die Betrachtung für den zweiten Fall ist analog zum ersten.  
 Es sei nun  $x_1 \equiv dx_2 + \Theta$  und  $y_2 \equiv dy_1 + \Theta$ .  
 Ist  $x_2 \equiv dy_1 + \Theta$ , folgt  $\pm\Theta \equiv d(x_2 - y_2) \equiv \pm d\Theta$ , also wie oben  $x_2 = y_2$ .  
 Ist  $y_1 \equiv dx_2 + \Theta$ , so folgt  $\pm\Theta \equiv d(x_1 - y_1) \equiv \pm d\Theta$  also  $x_1 = y_1$ , ein Widerspruch in beiden Fällen.  
 Damit gilt die Behauptung von i).

ii) folgt fast unmittelbar aus i):



Mit i) gilt:  $y_1 \equiv dx_1 + \Theta$  und  $y_2 \equiv dx_2 + \Theta$ .  
 Daraus folgt:  $\pm\Theta \equiv d(y_1 - y_2) \equiv d^2(x_1 - x_2) \pm d\Theta \equiv d^2(x_1 - x) + d^2(x - x_2) \pm d\Theta \equiv \pm d(\Theta \pm \Theta \pm \Theta)$ , also, wie in i):  $y_1 = y_2$ , da  $n \geq d^3 > 3d^2 - 2d - 1$ , ein Widerspruch.

**Lemma 2.4** i) Ist  $n \geq d^4$ , so ist jede Ecke des  $G_B(d, n)$  in höchstens einem Typ 4 Kreis enthalten.

ii) Ist  $n \geq d^3$ , so ist jede Kante des  $G_B(d, n)$  in höchstens einem Typ 4 Kreis enthalten.

iii) Ist  $n \geq d^4$  und  $x$  eine Ecke eines echten Typ 4 Kreises im  $G_B(d, n)$ , dann inzidiert  $x$  mit keiner Doppelkante.

iv) Sei  $n \geq d^4$ ,  $C = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  ein Typ 4 Kreis im  $G_B(d, n)$ .

Dann gibt es kein  $\chi \in \{-d(d-1)+1, \dots, d(d-1)-1\}$  mit  $d(x_1 - x_3) \equiv \chi$  oder  $d(x_2 - x_4) \equiv \chi$ .

denn: i) Ann.:  $x_1$  liegt auf zwei Typ 4 Kreisen. Dann gilt:

$$x_1 \equiv dx_4 + \Theta \equiv d^2x_3 + {}^{(2)}\Theta \equiv d^3x_2 + {}^{(3)}\Theta \equiv d^4x_1 + {}^{(4)}\Theta$$

$$\text{und damit: } (1 - d^4)x_1 \equiv {}^{(4)}\Theta \equiv d^3\theta_1 + d^2\theta_2 + d\theta_3 + \theta_4 \quad (\diamond).$$

Mit  $x_1$  sind nach Lemma 1.2 ii)  $\theta_1, \dots, \theta_4$  und damit die restlichen Ecken  $x_2, x_3$  und  $x_4$  eindeutig bestimmt, da  $n > d^4 - 1$ .

ii) Aus  $(\diamond)$  folgt  $(1 - d^4)x_1 - d^3\theta_1 \equiv d^2\theta_2 + d\theta_3 + \theta_4$ , d.h. mit  $x_1$  und  $\theta_1$ , also  $x_1$  und  $x_2$ , sind  $\theta_2, \theta_3, \theta_4$  und damit wiederum der 4 Kreis eindeutig bestimmt, da  $n > d^3 - 1$  gilt.

iii) Sei  $x_1x_2$  ein Bogen in einem Vierkreis  $C$  vom Typ 4, sodaß  $x_1$  mit einer Doppelkante inzidiert. Es gibt dann  $\theta_1$  und  $\theta_2$  mit  $(1 - d^2)x_1 \equiv d\theta_1 + \theta_2$ .

Damit:  $(1 - d^4)x_1 \equiv d^3\theta_1 + d^2\theta_2 + d\theta_1 + \theta_2$ , womit wegen  $n \geq d^4$  folgt:  $x_2 \equiv dx_1 + \theta_1$ . Es folgt schließlich  $dx_2 + \theta_2 \equiv d^2x_1 + d\theta_1 + \theta_2 \equiv x_1$ ,  $C$  enthält also eine Doppelkante und ist kein echter Typ 4 Kreis.

iv) Ann.: Es sei  $d(x_1 - x_3) \equiv \chi$  mit  $\chi \in \{-d(d-1) + 1, \dots, d(d-1) - 1\}$ . Da sich  $x_1$  und  $x_3$  auf einem Typ 4 Kreis gegenüberliegen, gilt:  $x_3 \equiv d^2x_1 + {}^{(2)}\Theta$  und  $x_1 \equiv d^2x_3 + {}^{(2)}\Theta$ , damit  $(1 + d^2)(x_1 - x_3) \equiv \pm {}^{(2)}\Theta$  und also:

$$(1 + d^2)\chi \equiv (1 + d^2)d(x_1 - x_3) \equiv \pm d {}^{(2)}\Theta.$$

Da  $|\chi| < d(d-1)$  gilt und  $n > (1 + d^2)(d^2 - d - 1) + d(d^2 - 1) = d^4 - 2d - 1$ , folgt  $(1 + d^2)\chi \pm d {}^{(2)}\Theta = 0$  und damit, da  $(d^2 + 1)$  keine Zahl aus  $\{1, \dots, d^2 - 1\}$  teilt, folgt  $\chi = 0$  und  $(1 + d^2)(x_1 - x_3) \equiv 0$ , also  $x_1 = x_3$ , da  $dx_1 \equiv dx_3$ , ein Widerspruch.

**Bemerkung 2.4.1** Insbesondere gilt für je zwei auf einem Typ 4 Kreis sich gegenüberliegende Ecken  $x_1$  und  $x_3$  weder  $x_1 - x_3 \equiv \pm\Theta$  noch  $d(x_1 - x_3) \equiv \pm\Theta$ , falls  $n \geq d^4$ .

denn: Nach Lemma 2.4 iv) bleibt nur noch zu zeigen, daß nicht  $x_1 - x_3 \equiv \pm(d-1)$  gilt. Sei also ohne Einschränkung  $x_1 - x_3 \equiv d-1$ . Dann folgt aber wie im Beweis von Lemma 2.4 iv):  $\pm {}^{(2)}\Theta \equiv (1 + d^2)(x_1 - x_3) \equiv (1 + d^2)(d-1)$ , ein Widerspruch, da  $n \geq d^4 > d^3 + d - 2$ .

### 3 Drei Propositionen

**Definition 4** i) Sei  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m$  ein Produkt einfacher zusammenhängender Graphen und  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$ .

Ist  $l = \max|\{j : \forall x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in V(\mathcal{G}) : x_j = y_j\}|$ , dann heißt  $\dim(\mathcal{G}) = m - l$  die Dimension von  $\mathcal{G}$ .

ii) Ein 4-Kreis  $\mathcal{C}$  in einem zweidimensionalen Gitter  $\mathcal{M}$  heißt Eckkreis, wenn  $\mathcal{C}$  eine Ecke  $x$  mit  $\text{Grad}_{in \mathcal{M}}(x) = 2$  enthält.

Ist  $\mathcal{M}$  ein  $3 \times 3$ -Gitter, dann heißt der Knoten  $x$  in  $\mathcal{M}$  mit  $\text{Grad}_{in \mathcal{M}}(x) = 4$  Mittelpunkt von  $\mathcal{M}$  und diejenigen Knoten mit  $\text{Grad}_{in \mathcal{M}}(x) = 2$  Eckpunkte von  $\mathcal{M}$ .

**Proposition 1** Sei  $m \geq 2$ ,  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m \subset G_B(d, n)$ , wobei die  $\mathcal{G}_i$  einfache, zusammenhängende und nichttriviale Graphen seien.

i) Gilt  $m = 2$ ,  $n \geq d^4$  und  $|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$ , dann enthält jedes Gitter  $\mathcal{M}(t_1, t_2) \subset \mathcal{G}$  einen echten Typ 4 Kreis höchstens als Eckkreis.

Ist  $n \geq 2d^4 + d^2 - 2d$  oder gilt  $n \geq d^4$  und  $d|n$ , dann enthält  $\mathcal{G}$  keinen echten Typ 4 Kreis.

ii) Gilt  $n \geq d^3$ , dann gibt es in jedem in  $\mathcal{G}$  enthaltenen Hyperwürfel  $\mathcal{H} = \mathcal{K}_2^3$  höchstens einen echten Typ 4 Kreis.

Gilt  $m \geq 3$  und  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$  oder  $n \geq d^3$  und  $d|n$ , dann gilt für je zwei gegenüberliegende Ecken  $x$  und  $y$  auf einem 4-Kreis  $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ :  $x - y \equiv \pm \Theta$  oder  $d(x - y) \equiv \pm \Theta$ .

Beweis:

i)  $m = 2$ ,  $|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$ ,  $n \geq d^4$

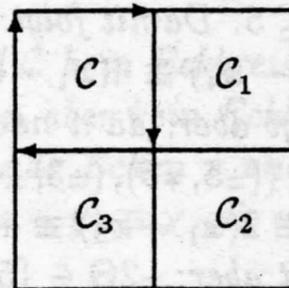
Sei  $\mathcal{C}$  ein echter Typ 4 Kreis in  $\mathcal{G}$ .

Es gibt dann ein  $3 \times 3$ -Gitter

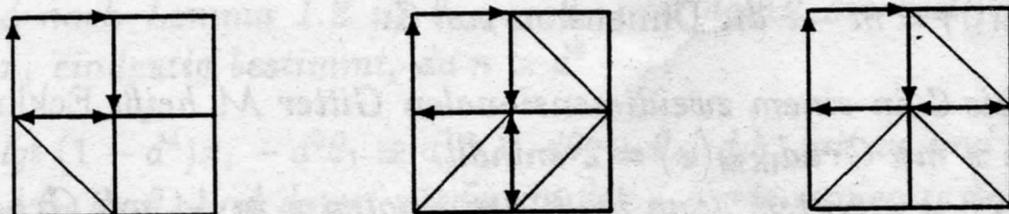
$\mathcal{M}(3, 3)$  mit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(3, 3) \subset \mathcal{G}$ .

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  und  $\mathcal{C}_3$  sind nach

Lemma 2.4 i) Typ 1 oder Typ 3 Kreise.



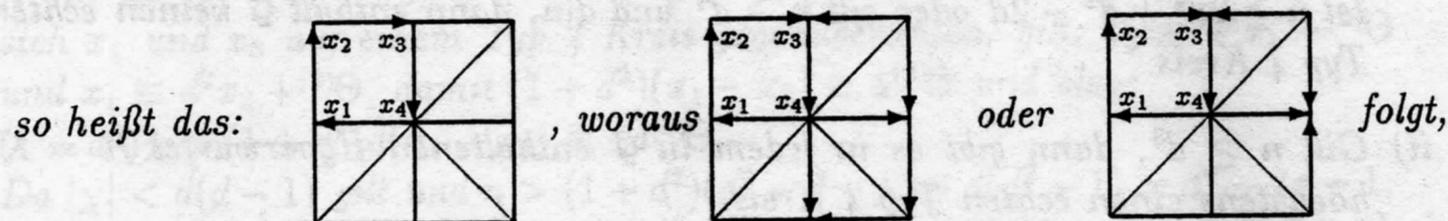
Gilt  $d|n$ , dann ist mit Lemma 2.3 i) jeder Typ 3 Kreis auch vom Typ 1. Bei jeder Wahl der  $C_i$  als Typ 3 oder Typ 1 Kreise inzidiert damit der Mittelpunkt von  $M(3,3)$  und damit der Typ 4 Kreis  $C$  mit einer Doppelkante im Widerspruch zu Lemma 2.4 iii):



Die Aussage für den Fall  $d|n$  ist also bewiesen. Es gelte im Weiteren  $d \nmid n$ .

Zunächst soll der Fall  $d = 2$  betrachtet werden. Der  $G_B(2, n)$  hat den Höchstgrad  $\text{Grad}_{\max} = \text{Grad}_{\text{in}, \max} = \text{Grad}_{\text{aus}, \max} = 2$ .

Aus den Lemmata 2.1 ii) und 2.2 folgt: Gilt  $2(x_1 - x_3) \equiv \pm 6$ ,



im Widerspruch zu  $\text{Grad}_{\max} = 2$ .

Daher gilt also:  $2(x_1 - x_3) \equiv \chi$  mit  $\chi \in \{-5, \dots, 5\}$ . Da  $x_1 \equiv d^2 x_3 + {}^{(2)}\Theta$  und  $x_1 \equiv d^2 x_3 + {}^{(2)}\Theta$  mit  $d = 2$  gilt, ist also  $5\chi \equiv (1 + d^2)d(x_1 - x_3) \equiv \pm 2{}^{(2)}\Theta$ , ein Widerspruch für  $n \geq 2d^4 + d^2 - 2d = 32 > 31 = 25 + 6$ .

Sei jetzt  $n \geq d^4 = 16$  und der Typ 4 Kreis  $C$  kein Eckkreis.

Sei  $C = (x_1, \dots, x_4)$ ,  $x_2 \equiv 2x_1 + \Theta$ ,  $x_3 \equiv 2x_2 + \Theta$ ,  $x_4 \equiv 2x_3 + \Theta$  und  $x_1 \equiv 2x_4 + \Theta$ . Es ist dann:  $2(x_1 - x_3) \equiv \chi_1$  und  $2(x_2 - x_4) \equiv \chi_2$  mit

$|\chi_1|, |\chi_2| \leq 5$ . Damit folgt:

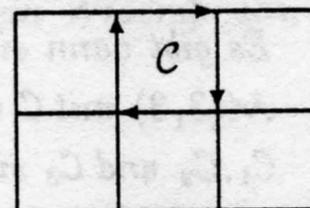
$$\chi_2 \equiv 2(x_2 - x_4) \equiv 4(x_1 - x_3) \pm 2\Theta \equiv 2\chi_1 \pm 2\Theta.$$

Damit folgt aber, da  $n$  nach Voraussetzung ungerade ist,

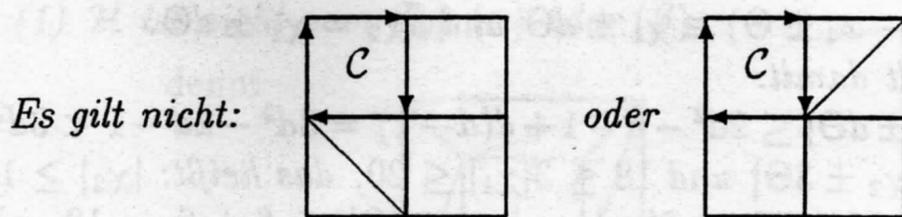
$(\chi_1, \chi_2) \in \{(\pm 5, \mp 5), (\pm 3, \pm 4), (\pm 2, \pm 4), (\pm 2, \pm 2)\}$ . Es ist

auch:  $\chi_1 \equiv 2(x_1 - x_3) \equiv 4(x_4 - x_2) \pm 2\Theta \equiv -2\chi_2 \pm 2\Theta$ .

Dann folgt aber:  $\pm 2\Theta \in \{5, 11, 10, 6\}$ , ein Widerspruch.

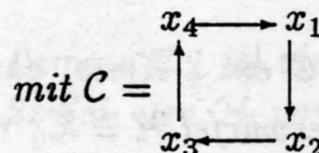
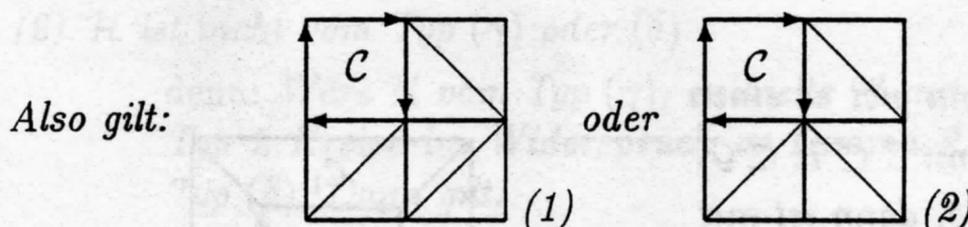
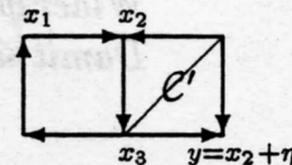


Damit ist die Behauptung für den Fall  $d = 2$  bewiesen. Sei im Weiteren  $d \geq 3$ .



denn: Da  $C'$  ein Typ 1 oder Typ 3 Kreis ist, gibt es ein  $\eta \in \{-(d-1), \dots, d-1\}$ , sodaß  $y \equiv x_2 + \eta$ .

Da  $x_2 \equiv dx_1 + \Theta$  und  $x_2 + \eta \equiv dx_3 + \Theta$ , folgt:  
 $d(x_1 - x_3) \equiv \eta \pm \Theta$  im Widerspruch zu Lemma 2.4 iv).



Es gibt also  $\eta, \eta_1, \eta_2, \vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2 \in \{-(d-1), \dots, d-1\}$ , sodaß Folgendes gilt :  
 im Fall (1) :  $d(x_1 - x_3) \equiv d\eta + \vartheta_1 + \vartheta_2$  und  
 im Fall (2) :  $d(x_1 - x_3) \equiv d(\eta_1 + \eta_2) + \vartheta$ .

Es gibt also in beiden Fällen ein  $\chi \in \{-(2d^2 - d - 1), \dots, 2d^2 - d - 1\}$ , sodaß  $d(x_1 - x_3) \equiv \chi$ . Da  $C$  ein Typ 4 Kreis ist, gilt :

$x_3 \equiv d^2 x_1 + {}^{(2)}\Theta \equiv d^2 x_3 + d\chi + {}^{(2)}\Theta$  und  $dx_3 + \chi \equiv dx_1 \equiv d^3 x_3 + d{}^{(2)}\Theta$   
 und damit:  $(1 + d^2)\chi \equiv \pm d{}^{(2)}\Theta$ .

Aus Lemma 2.4 iv) folgt andererseits:

$\chi \notin \{-d(d-1) + 1, \dots, d(d-1) - 1\}$ , also  $|\chi| \geq d(d-1)$ .

Ist  $n > (1 + d^2)(2d^2 - d - 1) + d(d^2 - 1) = 2d^4 + d^2 - 2d - 1$ ,

folgt  $(1 + d^2)d(d-1) \leq d(d^2 - 1)$ , ein Widerspruch.  $\mathcal{G}$  enthält in diesem Fall keinen Kreis vom Typ 4.

Sei im Weiteren  $d^4 \leq n \leq 2d^4 + d^2 - 2d - 1$  und  $C$  kein Eckkreis.

Dann gibt es ein  $3 \times 4$ -Gitter, in dem  $C$  enthalten aber kein Eckkreis ist. Wie oben gibt es für je zwei auf  $C$  sich gegenüberliegende Ecken  $x$  und  $y$  ein  $\chi \in \{-(2d^2 - d - 1), \dots, 2d^2 - d - 1\}$ , sodaß  $d(x - y) \equiv \chi$  gilt und  $|\chi| \geq d(d-1)$ . Es gilt also:

$d(x_2 - x_4) \equiv \chi_1$  und  $d(x_1 - x_3) \equiv \chi_2$  mit  $d(d-1) \leq |\chi_1|, |\chi_2| \leq 2d^2 - d - 1$ .

Damit ist:  $d\chi_1 \equiv d^2(x_2 - x_4) \equiv d(x_3 - x_1 \pm \Theta) \equiv -\chi_2 \pm d\Theta$ ,

also  $d\chi_1 = -\chi_2 \pm d\Theta$ , da  $n \geq d^4 > 2d^3 + 2d^2 - 3d - 1$

$= (d+1)(2d^2 - d - 1) + d(d-1)$  für  $d \geq 3$  gilt. Genauso folgt:

$$d\chi_2 \equiv d^2(x_1 - x_3) \equiv d(x_2 - x_4 \pm \Theta) \equiv \chi_1 \pm d\Theta \text{ und } d\chi_2 = \chi_1 \pm d\Theta.$$

Da nun  $|\chi_i| \geq d(d-1)$  gilt damit:

$$d^2(d-1) \leq d|\chi_1| = |-\chi_2 \pm d\Theta| \leq 2d^2 - d - 1 + d(d-1) = 3d^2 - 2d - 1 < 3d^2.$$

Es folgt:  $d = 3$ ,  $18 \leq |-\chi_2 \pm 3\Theta|$  und  $18 \leq 3|\chi_1| \leq 20$ , das heißt:  $|\chi_2| \geq 12$  und  $|\chi_1| = 6$ . Dann folgt aber  $36 \leq 3|\chi_2| = |\chi_1 \pm 3\Theta| \leq 6 + 6 = 12$ , ein Widerspruch, da  $n \geq 81 = 3^4$ .

Damit ist der Teil i) von Proposition 1 bewiesen.

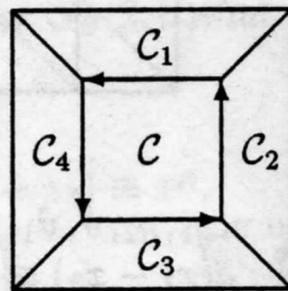
ii)  $m \geq 3$

Sei  $C$  ein 4-Kreis, dann gibt es einen Hyperwürfel  $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}_2^3$  mit  $C \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ . Ist  $C$  vom Typ 1 oder 3, dann ist mit Lemma 2.1 alles gezeigt.

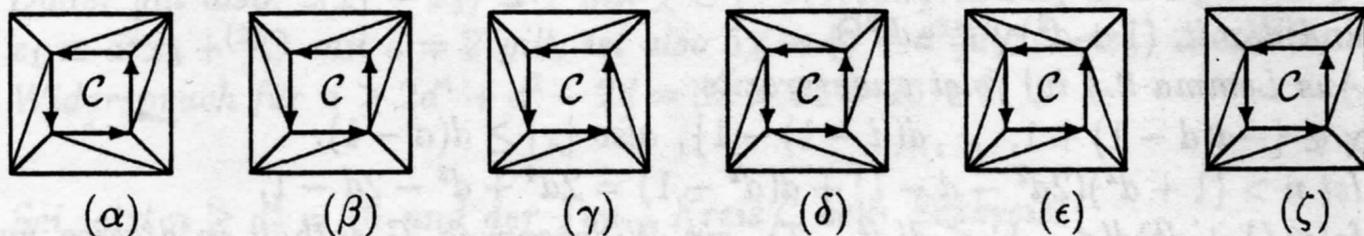
Sei also  $C$  echt vom Typ 4.

Nach Lemma 2.4 ii) sind dann

$C_1, \dots, C_4$  Typ 1 oder Typ 3 Kreise.



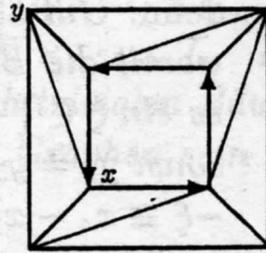
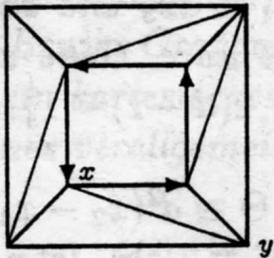
$\mathcal{H}$  gehört zu einem der folgenden Typen :



denn: Es gibt genau  $2^4 = 16$  Möglichkeiten, in den vier  $C$  in  $\mathcal{H}$  umgebenden Typ 1 oder Typ 3 Kreisen sich jeweils gegenüberliegende Ecken  $x$  und  $y$  durch die Beziehung  $d(x - y) \equiv \pm\Theta$  zu verbinden. Die Typen  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  und  $(\epsilon)$  repräsentieren (durch Rotation um  $C$ ) jeweils vier, der Typ  $(\zeta)$  zwei dieser Möglichkeiten und die Typen  $(\gamma)$  und  $(\delta)$  jeweils eine Weitere. Also ist jede dieser Möglichkeiten durch die angegebenen sechs Typen repräsentiert.

(1)  $\mathcal{H}$  ist nicht vom Typ  $(\alpha)$  oder  $(\beta)$

denn:

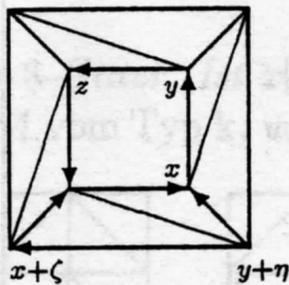


Es ist  $x \equiv y \pm \Theta \pm \Theta \pm \Theta$  und  $d(x - y) \equiv \pm \Theta$ .

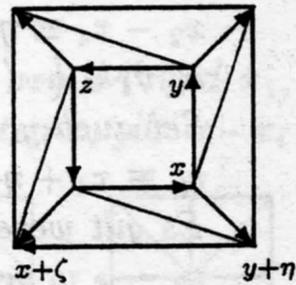
Also  $\pm \Theta \equiv d(\Theta \pm \Theta \pm \Theta)$ , ein Widerspruch.

(2)  $\mathcal{H}$  ist nicht vom Typ  $(\gamma)$  oder  $(\delta)$

denn: Wäre  $\mathcal{H}$  vom Typ  $(\gamma)$ , enthielte  $\mathcal{H}$  mit Lemma 2.1 ii) vier Typ 2 Kreise im Widerspruch zu Lemma 2.2. Sei also  $\mathcal{H}$  vom Typ  $(\delta)$ . Dann gilt:



oder



Also gibt es ein  $\vartheta \in \{-(d-1), \dots, d-1\}$

mit:  $d(x + \zeta) + \vartheta \equiv dz \equiv d^2y + d\Theta$ .

Da nun wegen Lemma 2.2 gilt:  $x + \zeta \equiv d(y + \eta) + \Theta$ ,

folgt:  $\vartheta \equiv -d^2\eta \pm d\Theta$ , also  $\vartheta = 0$ , für  $n > d^3 - 1$ .

Mit  $d^2\eta \equiv \pm d\Theta$  folgt  $\eta = 0$ , ein Widerspruch.

(3)  $\mathcal{H}$  ist nicht vom Typ  $(\epsilon)$ ,

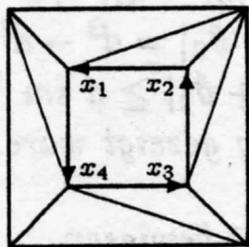
denn: Es gibt  $\chi, \xi \in \{-2(d-1), \dots, 2(d-1)\}$  mit  $d(x_1 - x_3) \equiv \chi$

und  $x_1 - x_3 \equiv \xi$ . Es folgt:  $d\xi \equiv \chi$ , also  $\xi \equiv \pm 1$  und  $\chi = \pm d$ ,

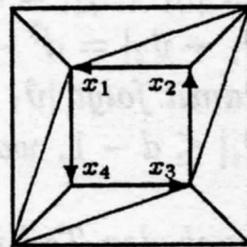
womit dann  $d(x_2 - x_4) \equiv x_1 - x_3 \pm \Theta \equiv \pm 1 \pm \Theta$  und

$d(x_2 - x_4) \equiv d^2(x_3 - x_1) \pm d\Theta \equiv -(\pm d^2) \pm d\Theta$  gilt.

Damit ist:  $\pm(1 + d^2) \equiv \pm^{(2)}\Theta$ , ein Widerspruch.



( $\epsilon$ )



( $\varsigma$ )

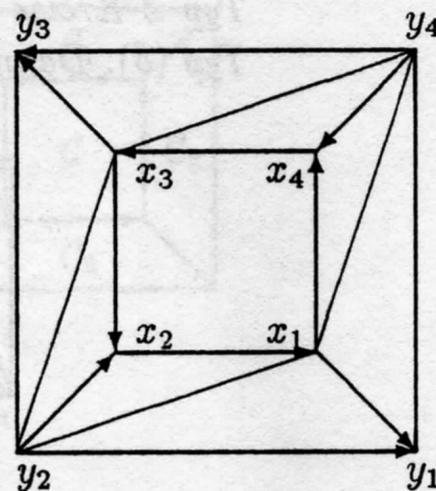
(4) Ist  $\mathcal{H}$  vom Typ  $(\zeta)$ , dann gilt die Behauptung.

denn: Gilt  $d|n$ , dann auch  $dx_1 \equiv dx_3$  und damit:  $x_2 - x_4 \equiv \pm\Theta$ , womit die Behauptung gezeigt wäre. Gelte also  $d \nmid n$ . Dann gibt es ein  $\xi \in \{-2(d-1)+1, \dots, 2(d-1)-1\}$  mit  $x_2 - x_4 \equiv \xi$ , da sonst  $y_1 = y_3$ . Es folgt:

$-\xi \equiv x_4 - x_2 \equiv d(x_1 - x_3) \pm \Theta \equiv d^2(x_2 - x_4) \pm d\Theta \pm \Theta$   
 $\equiv d^2\xi \pm {}^{(2)}\Theta$  und damit:  $(1+d^2)\xi \equiv \pm {}^{(2)}\Theta$ . Ist  $n > 2d^3 - 2d^2 + 2d - 4$ , folgt  $\xi = 0$ , ein Widerspruch und damit die Behauptung für  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$ .

Es bleibt noch zu zeigen, daß für  $n < 2(d^3 - d^2 + d)$  jeder dreidimensionale Hyperwürfel im  $G_B(d, n)$  höchstens einen Vierkreis vom Typ 4 enthält.

Sei jetzt  $n \leq 2(d^3 - d^2 + d)$   
 und  $d(x_1 - x_3) \equiv \vartheta_1 + \vartheta_2$ ,  
 $x_2 - x_4 \equiv \eta_1 + \eta_2$  mit  
 $\eta_i, \vartheta_i \in \{-(d-1), \dots, d-1\}$ .  
 Sei auch  $y_1 \equiv x_4 + \eta_2$  und  
 $y_3 \equiv x_4 + \eta_1$ .  
 Es gilt wegen Lemma 2.1 ii):  
 $y_2 \rightarrow y_1$  und  $y_4 \rightarrow y_3$



Es ist zu zeigen, daß der Kreis  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  kein echter Typ 4 Kreis ist. Sei also  $y_3 \rightarrow y_2$  und  $y_1 \rightarrow y_4$ .

Es ist  $dx_1 - \vartheta_1 \equiv dy_2 \equiv d^2y_3 + d\Theta$  und  $dx_1 - \vartheta_2 \equiv dy_4 \equiv d^2y_1 + d\Theta$ ,  
 woraus  $\vartheta_1 - \vartheta_2 \equiv d^2(y_1 - y_3) \pm d\Theta \equiv d^2(\eta_2 - \eta_1) \pm d\Theta$  folgt.

Gilt  $|\eta_1 - \eta_2| \leq d - 2$ , dann auch  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ , denn es ist  
 $n \geq d^3 - d^2 + d - 2$ .

Sei also  $|\eta_1 - \eta_2| \geq d - 1$ . Dann ist aber  $|\eta_1 + \eta_2| \leq d - 1$ , da sonst für ein  $i \in \{1, 2\}$   $2|\eta_i| \geq 2d - 1$  folgen würde im Widerspruch zu  $|\eta_i| \leq d - 1$ . Gilt  $|\eta_1 + \eta_2| \leq d - 2$ , dann folgt  $\vartheta_1 = -\vartheta_2$  mit  
 $\vartheta_1 + \vartheta_2 \equiv d(x_1 - x_3) \equiv d^2(x_2 - x_4) \pm d\Theta \equiv d^2(\eta_1 + \eta_2) \pm d\Theta$ , da  
 $n > d^3 - 1$ , also  $dy_2 = dy_4$ : die Behauptung.

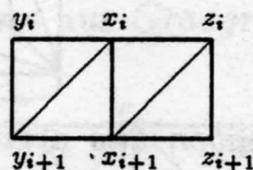
Sei  $|\eta_1 + \eta_2| = d - 1$ . Es gilt dann  $|\eta_1 - \eta_2| = d - 1$ ,  
 $|\vartheta_1 - \vartheta_2| = d^3 - d^2 \pm d\Theta$  und  $|\vartheta_1 + \vartheta_2| = d^3 - d^2 \pm d\Theta$ .

Damit folgt  $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \geq d$  und  $|\vartheta_1 + \vartheta_2| \geq d$  im Widerspruch zu  
 $|\vartheta_i| \leq d - 1$ , womit die Behauptung gezeigt wäre.

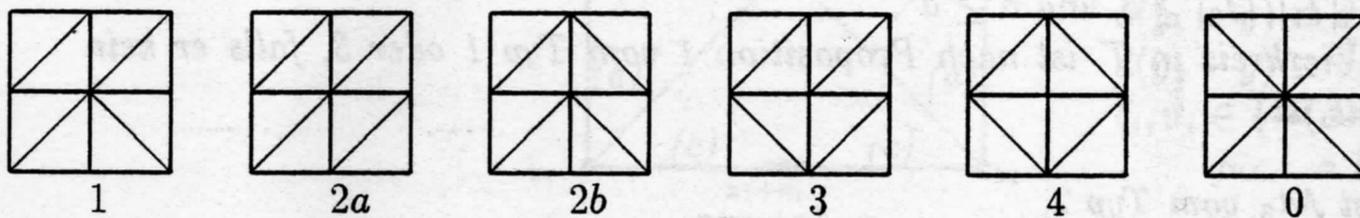
Damit ist auch der Teil ii) von Proposition 1 bewiesen.  $\square$

Sei  $m \geq 2$  und  $G_1, \dots, G_m$  einfache, zusammenhängende und nichttriviale Graphen,  $T_1, \dots, T_m$  aufspannende Teilbäume von  $G_1, \dots, G_m$ . Ist  $G = G_1 \times \dots \times G_m$  Teilgraph eines verallgemeinerten de Bruijn Graphen, so auch  $T = T_1 \times \dots \times T_m$ . Es genügt also zu untersuchen, wann ein kartesisches Produkt von nichttrivialen Bäumen kein aufspannender Teilgraph eines verallgemeinerten de Bruijn Graphen sein kann.

**Definition 5** Sei  $T = T_1 \times T_2 \subset G_B(d, n)$ ,  $T_1$  und  $T_2$  nichttriviale Bäume und jeder Vierkreis in  $T$  sei vom Typ 1 oder 3. Ein ungerichteter einfacher Weg  $W = x_0 \dots x_k$  heißt ein trennender Weg, wenn es für jede Kante  $x_i x_{i+1}$  in  $W$  zwei Vierkreise  $(x_i, x_{i+1}, y_{i+1}, y_i)$  und  $(x_i, x_{i+1}, z_{i+1}, z_i)$  vom Typ 1 oder 3 in  $T$  gibt, sodaß  $d(x_i - y_{i+1}) \equiv \pm \Theta$ ,  $d(x_{i+1} - z_i) \equiv \pm \Theta$  und  $x_i - z_{i+1} \equiv \pm \Theta$ ,  $x_{i+1} - y_i \equiv \pm \Theta$  gilt.



Sei  $M \subseteq G_B(d, n)$  ein  $3 \times 3$ -Gitter. Ist  $x$  der Mittelpunkt von  $M$  und  $x_1, \dots, x_4$  die Eckknoten, dann heißt  $M$  vom Typ  $k$ , wenn für  $k$  Eckknoten  $x_i$  gilt:  $x - x_i \equiv \pm \Theta$ :



Da mit Korollar 2.3.1 ii) das Schema von  $M$  weder vom Typ 1 noch vom Typ 2a ist, gibt es vier Typen mit jeweils eindeutig bestimmten Schema. Der Typ 2b soll im Folgenden Typ 2 genannt werden.

Ist  $|T_1|, |T_2| \geq 3$  und  $T = T_1 \times T_2 \subset G_B(d, n)$ , dann enthält  $T$  genau dann einen trennenden Weg, wenn in  $T$  ein  $3 \times 3$ -Gitter vom Typ 2 oder 3 enthalten ist.

**Proposition 2** Sei  $m \geq 2$  und  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m \subset G_B(d, n)$ .

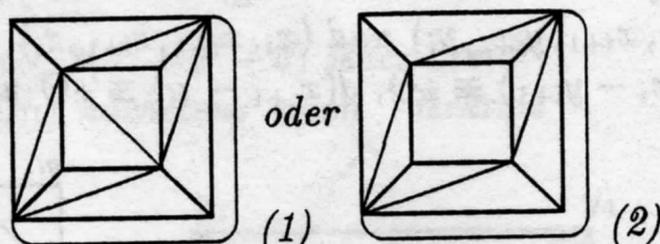
i) Sei  $m = 2$ ,  $n \geq d^4$  und  $|\mathcal{T}_1|, |\mathcal{T}_2| \geq 3$ . Ist  $W = x_0 \dots x_k$  ein trennender Weg in  $\mathcal{T}$ , dann ist  $k \leq 5$  und  $x_0 \neq x_k$ .

Inzidiert  $x_0$  beziehungsweise  $x_k$  nicht mit einem echten Typ 4 Kreis, dann gibt es  $i, j \in \{1, 2\}$  mit  $\text{Grad}_{\text{in}\mathcal{T}_i}(x_0) = 1$  und  $\text{Grad}_{\text{in}\mathcal{T}_j}(x_k) = 1$ .

Gilt  $n \geq d^4$ ,  $|\mathcal{T}_1|, |\mathcal{T}_2| \geq 3$  und  $d|n$  oder  $d = 2$ , dann enthält  $\mathcal{T}$  keinen trennenden Weg.

ii) Sei  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$ .

Dann haben alle Hyperwürfel  $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}_2^3$  mit  $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}$  eines der beiden nebenstehenden Schemata.



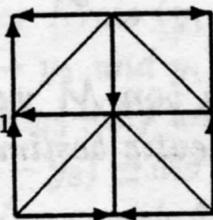
Gilt  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$ , dann haben alle dreidimensionale Hyperwürfel in  $\mathcal{T}$  ein Schema vom Typ (1).

**Beweis**

i)  $m = 2$ ,  $|\mathcal{T}_1|, |\mathcal{T}_2| \geq 3$  und  $n \geq d^4$ .

Jeder Vierkreis in  $\mathcal{T}$  ist nach Proposition 1 vom Typ 1 oder 3, falls er kein Eckkreis ist.

(1) Ist  $\mathcal{M}_3$  vom Typ 2,

so ist  $\mathcal{M}_3 \cong$   und  $x_1 - x_2 \equiv \pm 1$

denn: Die Ecken und Bögen von  $\mathcal{M}_3$  seien wie in der nachfolgenden Skizze bezeichnet.

Die in der Skizze mit (a) bezeichneten Bögen folgen unmittelbar aus Korollar 2.3.1, nämlich:

$$y \equiv dx + \Theta \text{ und } x_i \equiv dy_i + \Theta \text{ für } i = 1, 2.$$

Aus der Annahme, es sei  $x \equiv dy + d\vartheta_i + \Theta$  für  $i = 1, 2$ , folgt:

$$\zeta_1 \equiv d(x_1 - x) \equiv d^2(y_1 - y) - d^2\vartheta_1 \pm d\Theta \equiv d(\tilde{\vartheta}_1 \pm \Theta - d\vartheta_1)$$

und damit  $\zeta_1 = 0$ . Da nun auch  $x_1 - x \equiv \tilde{\vartheta}_1 \pm \Theta - \vartheta_1$  gilt, folgt  $x_1 = x$ , ein Widerspruch. Also gelten die mit (b) bezeichneten Bögen:

$$y + \vartheta_i \equiv dx + \Theta, i = 1, 2.$$

Aus der Annahme  $y_i \equiv dx_1 + d\eta_1 + \Theta$  folgt:

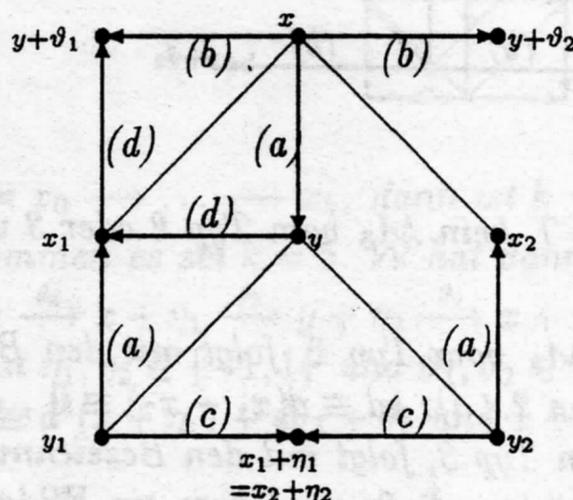
$\tilde{\vartheta}_i \equiv d(y_i - y) \equiv d^2(x_1 - x) + d^2\eta_1 \pm d\Theta$  und damit:  $\tilde{\vartheta}_i = 0$ , also  $dy_i \equiv dy$ . Da  $y_i - y \equiv d(x_1 - x) + d\eta_1 \pm \Theta \equiv \zeta_1 + d\eta_1 \pm \Theta$  gilt, folgt

$y_i = y$ , ein Widerspruch. Dies impliziert die mit (c) bezeichneten Bögen:

$$x_1 + \eta_1 \equiv x_2 + \eta_2 \equiv dy_i + \Theta, i = 1, 2.$$

Aus  $x_1 + \eta_1 \equiv x_2 + \eta_2$  folgt  $\zeta_2 - \zeta_1 \equiv d(x_2 - x_1) \equiv d(\eta_1 - \eta_2)$ , also  $\zeta_2 - \zeta_1 \equiv \pm d$  und damit:  $\eta_1 - \eta_2 \equiv \pm 1$ , also  $x_2 - x_1 \equiv \pm 1$ .

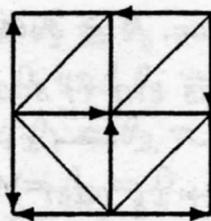
Aus der Annahme, es gelte  $dx_1 + \Theta \equiv y \equiv dx_2 + \Theta$ , folgt schließlich:  $\pm d \equiv d(x_2 - x_1) \equiv \pm \Theta$ , ein Widerspruch. Mit Lemma 2.2 folgen dann ohne Einschränkung die mit (d) bezeichneten Bögen. Insbesondere gilt dann aus Gradgründen  $d \geq 3$ .



$$\begin{aligned} d(x_1 - x) &\equiv \zeta_1 \\ d(x_2 - x) &\equiv \zeta_2 \\ d(y_1 - y) &\equiv \tilde{\vartheta}_1 \\ d(y_2 - y) &\equiv \tilde{\vartheta}_2 \\ \zeta_i, \tilde{\vartheta}_i &\in \{-(d-1), \dots, d-1\}, \\ &\text{für } i = 1, 2 \end{aligned}$$

(2) Ist  $\mathcal{M}_3$  vom Typ 3,

so ist  $\mathcal{M}_3 \cong$



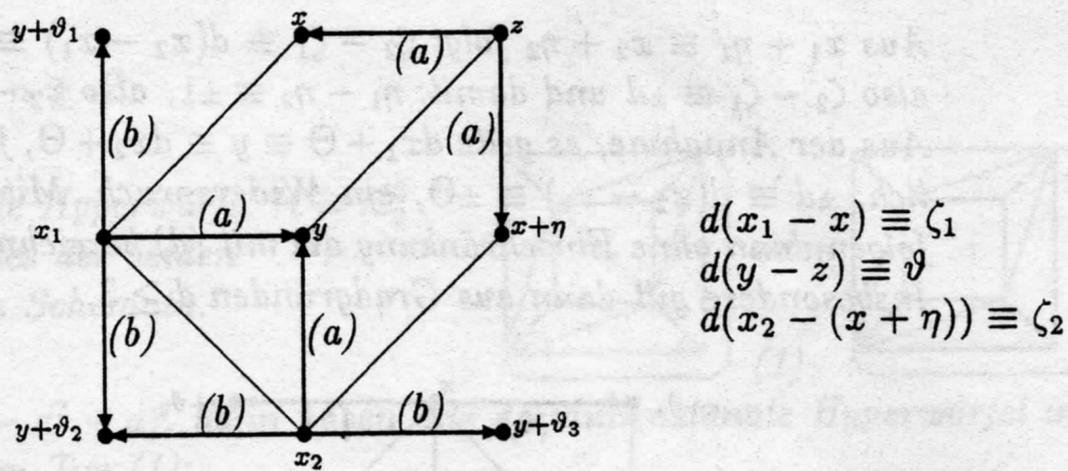
denn: Es gelten wieder die Bezeichnungen in der nachfolgenden Skizze. (a) folgt unmittelbar aus Korollar 2.3.1:

$$x \equiv dz + \Theta, x + \eta \equiv dz + \Theta \text{ und } y \equiv dx_i + \Theta \text{ für } i = 1, 2.$$

Gelte für  $i = 1, 2$ :  $x_1 \equiv dy + d\vartheta_i + \Theta$ , dann wäre  $\zeta_1 \equiv d(x_1 - x) \equiv d^2(y - z) + d^2\vartheta_i \pm d\Theta \equiv d(\vartheta + d\vartheta_i \pm \Theta)$ , also  $\zeta_1 = 0$  und, da  $x_1 - x \equiv d(y - z) \pm \Theta \equiv \vartheta \pm \Theta$ , auch  $x_1 = x$ , ein Widerspruch.

Gelte für  $i = 2, 3$ :  $x_2 \equiv dy + d\vartheta_i + \Theta$ ,

Proposition so auch  $\zeta_2 \equiv d(x_2 - x) - d\eta \equiv d^2(y - z) + d^2\vartheta_i - d\eta \pm d\Theta$ ,  $\zeta_2 = 0$ .  
 Mit  $x_2 - x - \eta \equiv d(y - z) + d\vartheta_i - \eta \pm \Theta$ , also  
 $x_2 - (x + \eta) \equiv \vartheta + d\vartheta_i - \eta \pm \Theta$ , folgt dann  $x_2 = x + \eta$ , ebenfalls ein Widerspruch. Damit folgen die mit (b) bezeichneten Bögen. Auch hier gilt aus Gradgründen  $d \geq 3$ , sodaß  $\mathcal{T}$  für  $d = 2$  keinen trennenden Weg enthält.



(3) Gilt  $d|n$  so enthält  $\mathcal{T}$  kein  $\mathcal{M}_3$  vom Typ 2 oder 3 und damit auch keinen trennenden Weg.

denn: Wäre  $\mathcal{M}_3$  vom Typ 2, folgt mit den Bezeichnungen von (1) aus Lemma 2.1 i):  $\pm d \equiv d(x_1 - x_2) \equiv 0$ , ein Widerspruch. Wäre  $\mathcal{M}_3$  vom Typ 3, folgt mit den Bezeichnungen von (2):  $dx \equiv dx + d\eta$ , also  $\eta = 0$ , wiederum ein Widerspruch.

(4) Ein trennender Weg in  $\mathcal{T}$  hat höchstens die ungerichtete Länge 5.

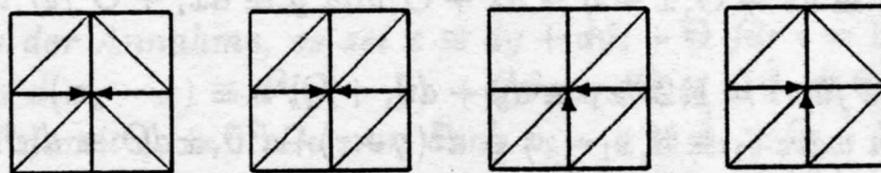
denn: Sei  $\mathcal{W} = x_0 \cdots x_k$ ,  $k \geq 3$  ein trennender Weg in  $\mathcal{T}$ .

• In  $\{0, \dots, k\}$  gibt es ein  $j$ , sodaß:

$$\mathcal{W} = x_0 \leftarrow x_1 \leftarrow \dots \leftarrow x_j \rightarrow \dots \rightarrow x_k,$$

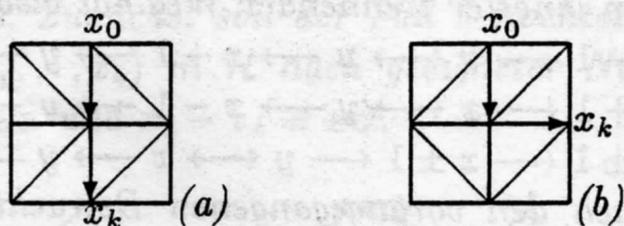
$$\mathcal{W} = x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_k \text{ oder } \mathcal{W} = x_0 \leftarrow \dots \leftarrow x_k \text{ gilt.}$$

Sonst gäbe es in  $\mathcal{W}$  ein  $x_i$ , sodaß  $x_{i-1} \rightarrow x_i \leftarrow x_{i+1} \subseteq \mathcal{W}$ . Und damit, da  $\mathcal{W}$  ein trennender Weg ist, ein  $3 \times 3$ -Gitter in  $\mathcal{T}$  mit einem der folgenden Schemata :

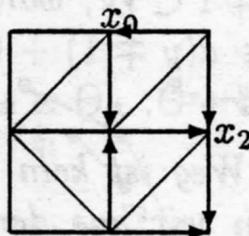


Das steht im Widerspruch zu (1), Korollar 2.3.1 oder (2) mit Lemma 2.2.

- Ist  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \subset \mathcal{W}$ , dann gilt  $x_0 - x_2 = \pm 1 \pmod n$ .  
Da  $\mathcal{W}$  ein trennender Weg ist, ist  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$  in einem  $3 \times 3$ -Gitter mit einem der folgenden Schemata enthalten:



Im Fall (a) folgt die Behauptung unmittelbar aus (1), im Fall (b) aus (1) und den Lemmata 2.2 und 2.3 ii):



- Ist  $\mathcal{W} = x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_k$ , dann ist  $k \leq 4$ .  
Angenommen es sei  $k = 5$ .  $\mathcal{W}$  hat dann folgende Form:  
 $x \xrightarrow{\theta_5} y \xrightarrow{\theta_4} x + \eta_1 \xrightarrow{\theta_3} y + \eta_2 \xrightarrow{\theta_2} x + \vartheta_1 \xrightarrow{\theta_1} y + \vartheta_2$ .  
Dabei ist  $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, 1\}$  und  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \{-2, 2\}$ . Es gilt also:  
 $x + \vartheta_1 \equiv d^2(x + \eta_1) + d\theta_3 + \theta_2$  und  $x + \eta_1 \equiv d^2x + d\theta_5 + \theta_4$ ,  
das heißt:  $\pm 1 \equiv \vartheta_1 - \eta_1 \equiv d^2\eta_1 + d(\theta_3 - \theta_5) + \theta_2 - \theta_4$ .

Damit folgt:  $\vartheta_1, \eta_1 > 0$  und  $\theta_2 = \theta_3 = 0, \theta_4 = \theta_5 = d - 1$   
oder:  $\vartheta_1, \eta_1 < 0$  und  $\theta_2 = \theta_3 = d - 1, \theta_4 = \theta_5 = 0$ .

Analog ist:  $\vartheta_2, \eta_2 > 0$  und  $\theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = \theta_4 = d - 1$   
oder:  $\vartheta_2, \eta_2 < 0$  und  $\theta_1 = \theta_2 = d - 1, \theta_3 = \theta_4 = 0$ .

Es gilt demnach:  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , also:  $\theta_3 = 0$  und  $\theta_3 = d - 1$   
oder  $\theta_1 = \theta_2 = d - 1$  und damit:  $\theta_3 = d - 1$  und  $\theta_3 = 0$ .

In beiden Fällen ein Widerspruch.

- Ein trennender Weg hat höchstens die ungerichtete Länge 5.  
Sei  $x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \subseteq \mathcal{W}$ . Dann gilt ohne Einschränkung:  $\mathcal{W} \supseteq x + 1 \xleftarrow{\theta_1} y \xleftarrow{\theta_2} x \xrightarrow{\vartheta_2} z \xrightarrow{\vartheta_1} x - 1$   
Also:  $x + 1 \equiv d^2x + d\theta_2 + \theta_1$  und  $x - 1 \equiv d^2x + d\vartheta_2 + \vartheta_1$ ,  
damit:  $2 \equiv d(\theta_2 - \vartheta_2) + \theta_1 - \vartheta_1$ . Daraus folgt dann:  $\theta_2 - \vartheta_2 = 1$   
und  $\theta_1 - \vartheta_1 \equiv -(d - 2)$ , da aus  $\theta_2 = \vartheta_2$  folgt:  $y = z$ .  
Es ist also  $z \equiv y - 1$ . Gilt  $\theta_1 = 0$ , dann ist  $\vartheta_1 = d - 2$  und  
 $x + 1 \equiv dy$ , woraus  $x \equiv d(y - 1) + d - 1 \equiv dz + d - 1$  folgt,

also:  $z \longleftrightarrow y$ .

Gilt  $\theta_1 = 1$ , dann  $\vartheta_1 = d - 1$  und  $x - 1 \equiv dz + d - 1 \equiv dy - 1$ ,

also:  $x \equiv dy$ ,  $x \longleftrightarrow x$ .

Ein längster trennender Weg hat also folgende Form:

$y - 1 \longleftarrow x \longleftrightarrow y \longrightarrow x + 1 \longrightarrow y + 1 \longrightarrow x + 2$  oder

$y + 1 \longleftarrow x \longleftrightarrow y \longrightarrow x - 1 \longrightarrow y - 1 \longrightarrow x - 2$  oder

$y \pm 1 \longleftarrow x \pm 1 \longleftarrow y \longleftrightarrow x \longrightarrow y \mp 1 \longrightarrow x \mp 1$

Nach den vorangegangenen Betrachtungen hätte sonst ein längster trennender Weg eine Länge größer als 5 und würde aus einem der drei genannten trennenden Wege durch Anhängen einer Ecke  $u$  hervorgehen. Dann wäre also

$u \longleftarrow y \mp 1 \subset W$ , woraus  $u \equiv x \mp 1$  folgt, also

$x \mp 1 \equiv d(y \mp 1) + \Theta$ . Mit  $x \pm 2 \equiv d(y \pm 1) + \Theta$  folgt

$\pm 3 \equiv \pm 2d + \Theta$ ,  $\pm \Theta \equiv \pm(2d - 3)$ , ein Widerspruch, da  $d \geq 3$ .

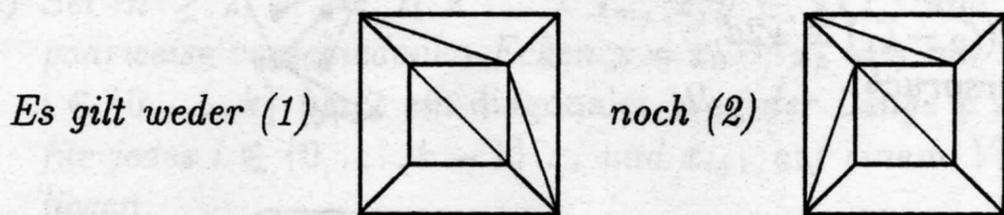
(5) Ein trennender Weg ist kein Kreis. Wäre ein trennender Weg  $W$  ein Kreis, so können wir aus den obigen Überlegungen schließen, daß  $W$  mindestens die ungerichtete Länge 8 hat. Denn mindestens vier kantendisjunkte Teilwege der (ungerichteten) Länge 3 eines trennenden Kreises lägen in einem  $3 \times 3$ -Gitter vom Typ 3.

(6) Sei angenommen,  $x_0$  inzidiere nicht mit einem echten Typ 4 Kreis und  $\text{Grad}_{\text{in } T_1}(x_0) > 0$  und  $\text{Grad}_{\text{in } T_2}(x_0) > 1$ . Dann gibt es eine zu  $x_0$  benachbarte Ecke  $x$ , sodaß  $x_1 x_0 x$  in einem in  $T$  enthaltenen  $3 \times 3$ -Gitter vom Typ 2 oder 3 liegt.  $x_0$  ist also kein Endknoten eines trennenden Weges. Damit gilt  $\text{Grad}_{\text{in } T_1}(x_0) = 1$  oder  $\text{Grad}_{\text{in } T_2}(x_0) = 1$ , die Behauptung. Die Betrachtung für  $x_k$  ist analog.

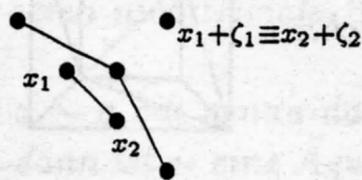
Damit sind die Behauptungen von Proposition 2 i) gezeigt.

ii)  $m \geq 3, n \geq d^3$

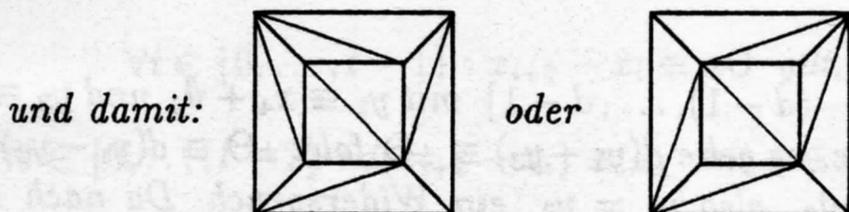
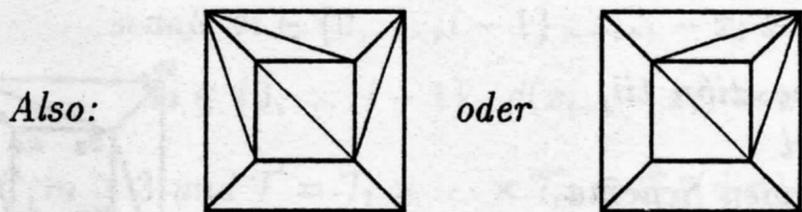
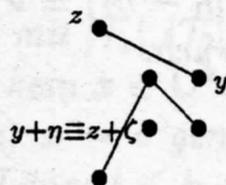
Sei  $\mathcal{H} = \mathcal{K}_2^3 \subset \mathcal{T}$  ein Hyperwürfel. Nach Proposition 1 enthält  $\mathcal{H}$  höchstens einen echten Typ 4 Kreis. Zunächst soll der Fall betrachtet werden, daß für jeden Vierkreis  $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_4)$  in  $\mathcal{H}$  nach geeigneter Nummerierung der Ecken gilt:  $d(x_1 - x_3) \equiv \pm\Theta$  und  $x_2 - x_4 \equiv \pm\Theta$ .



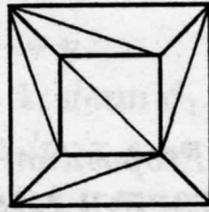
denn: (1) Aus  $x_1 + \zeta_1 \equiv x_2 + \zeta_2$   
folgt:  $\vartheta \equiv d(x_2 - x_1) \equiv d(\zeta_2 - \zeta_1)$ ,  
also  $\zeta_1 = \zeta_2, x_1 = x_2$ , ein Widerspruch.



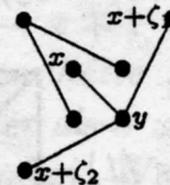
(2) Aus  $z + \zeta \equiv y + \eta$  folgt  
 $\vartheta \equiv d(z - y) \equiv d(\zeta - \eta), \eta = \zeta,$   
 $z = y$ , ein Widerspruch.



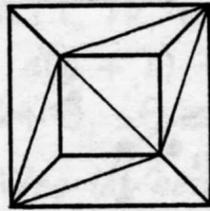
Es gilt nicht:



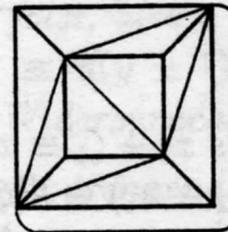
denn: Aus  $\vartheta_i \equiv d(y - (x + \zeta_i)) \equiv \vartheta + d\zeta_i$   
 folgt:  $d\zeta_i \equiv \vartheta + \vartheta_i$ , also  $\zeta_i = \pm 1$  (da  $\zeta_i \neq 0$ )  
 Es folgt:  $\vartheta_1 - \vartheta_2 \equiv d(\zeta_2 - \zeta_1) \equiv \pm 2d$ ,  
 da  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ , ein Widerspruch.



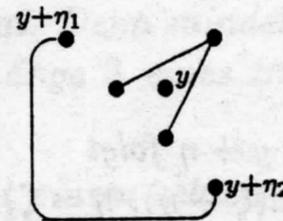
Es folgt demnach:



und damit

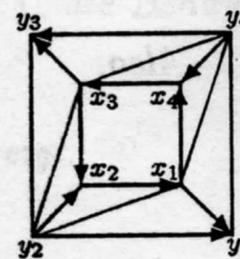


denn: Sonst gelte:  $d(\eta_1 - \eta_2) \equiv \vartheta$ ,  
 $\eta_1 = \eta_2$ , ein Widerspruch.



$\mathcal{H}$  enthalte nun einen Kreis echt vom Typ 4.

Im Beweis von Proposition 1ii)  
 wurde gezeigt, daß  $\mathcal{H}$   
 mit dem nebenstehenden Schema  
 dargestellt werden kann.



Es gibt  $\vartheta_1, \vartheta_3 \in \{-(d-1), \dots, d-1\}$  mit  $y_1 \equiv x_4 + \vartheta_1$  und  $y_3 \equiv x_4 + \vartheta_3$ .  
 Aus der Annahme, es gelte  $d(y_1 - y_3) \equiv \pm \Theta$  folgt  $\pm \Theta \equiv d(y_1 - y_3) \equiv d(\vartheta_1 - \vartheta_3)$   
 und damit  $\vartheta_1 = \vartheta_3$ , also  $y_1 = y_3$ , ein Widerspruch. Da nach Proposition 1  
 $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  nicht echt vom Typ 4 ist, gilt also:  $d(y_2 - y_4) \equiv \pm \Theta$  und  
 $y_1 - y_3 \equiv \pm \Theta$ , die Behauptung und damit die Proposition.  $\square$

**Definition 6** i) Sei  $\mathcal{G}$  ein einfacher, zusammenhängender Graph,  $x, y \in V(\mathcal{G})$ .

$d_{in\mathcal{G}}(x, y)$  bezeichne die Länge eines kürzesten Weges von  $x$  nach  $y$  in  $\mathcal{G}$

und für  $k \geq 0$  sei die  $k$ -te Umgebung von  $x$   $U_{in\mathcal{G}}^k(x)$  definiert durch:

$$U_{in\mathcal{G}}^k(x) = \{y \in V(\mathcal{G}) : d_{\mathcal{G}}(x, y) \leq k\}.$$

Sind bezüglich des Graphen  $\mathcal{G}$  keine Verwechslungen möglich, wird statt  $d_{in\mathcal{G}}(x, y)$  oder  $U_{in\mathcal{G}}^k(x)$  die Bezeichnung  $d(x, y)$  bzw.  $U^k(x)$  verwendet.

ii) Sei  $m \geq 2$ ,  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m$ ,  $x, y \in V(\mathcal{T})$  und  $k \geq 0$ . Eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken  $x = x_0 \dots x_k = y$  mit  $x_i \in V(\mathcal{T})$  für  $i \in \{0, \dots, k\}$  heißt ein diagonaler Weg der Länge  $k$  von  $x$  nach  $y$ , wenn sich für jedes  $i \in \{0, \dots, k-1\}$   $x_i$  und  $x_{i+1}$  auf einem Vierkreis in  $\mathcal{T}$  gegenüberliegen.

**Proposition 3** i) Sei  $m \geq 2$ ,  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_m$  seien nichttriviale Bäume und

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m \subset G_B(d, n).$$

Ist  $\sim \subseteq V(\mathcal{T}) \times V(\mathcal{T})$  definiert durch:  $x \sim y$  gilt genau dann, wenn es einen diagonalen Weg in  $\mathcal{T}$  von  $x$  nach  $y$  gibt, dann ist  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge von  $\mathcal{T}$ , die  $V(\mathcal{T})$  in genau zwei Äquivalenzklassen aufteilt.

ii) Sei  $n \geq d^4$  und  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \subset G_B(d, n)$  mit  $|\mathcal{T}_1|, |\mathcal{T}_2| \geq 3$ .

Ist  $k \geq 1$  und  $c \in V(\mathcal{T})$  so gewählt, daß kein  $x \in U^k(c)$  auf einem trennenden Weg liegt, so gilt für jedes  $x \in U^{k+1}(c)$   $x \sim c$  genau dann, wenn es einen diagonalen Weg  $x = x_0 \dots x_l = c$  einer Länge  $l \leq k+1$  gibt,

$$\text{soda\ss } \forall i \in \{0, \dots, l-1\} : x_{i+1} - x_i \equiv \pm\Theta \text{ oder}$$

$$\forall i \in \{0, \dots, l-1\} : d(x_{i+1} - x_i) \equiv \pm\Theta \text{ gilt.}$$

iii) Sei  $n \geq d^3$ ,  $m \geq 3$  und  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m \subset G_B(d, n)$ .

Für  $k \geq 1$  und  $x, y \in V(\mathcal{T})$  gilt  $x \sim y$  genau dann, wenn es einen diagonalen Weg  $x = x_0 \dots x_l = y$ ,  $l \leq d(x, y)$ , gibt, soda\ss

$$\forall i \in \{0, \dots, l-1\} : x_{i+1} - x_i \equiv \pm\Theta \text{ gilt, oder}$$

$$\forall i \in \{0, \dots, l-2\} : d(x_{i+2} - x_i) \equiv \pm\chi \text{ mit } \chi \in \{0, \dots, 2d\},$$

beziehungsweise  $\forall i \in \{0, \dots, l-1\} : d(x_{i+1} - x_i) \equiv \pm\Theta$ , falls  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$ .

Beweis:

i)  $\sim$  ist trivialerweise eine Äquivalenzrelation. So bleibt zu zeigen, daß  $V(\mathcal{T})$  in genau zwei Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$  zerfällt. Als Produkt bipartiter Graphen ist  $\mathcal{T}$  bipartit. Seien  $A$  und  $B$  die Farbklassen von  $\mathcal{T}$  und ohne Einschränkung  $x \in A$ . Ist  $y$  ebenfalls aus  $A$ , dann ist jeder  $x$ - $y$ -Weg von gerader Länge. Sei  $x = x_0 \cdots x_k = y$  ein Weg von  $x$  nach  $y$  und  $k$  gerade. Da keines der  $\mathcal{T}_i$  trivial ist, gibt es für jedes  $i \in \{0, \dots, k-2\}$  in  $\mathcal{T}$  einen Weg  $\tilde{x}_i \tilde{x}_{i+1} \tilde{x}_{i+2}$  der Länge 2 mit  $x_i \tilde{x}_i, x_{i+1} \tilde{x}_{i+1}, x_{i+2} \tilde{x}_{i+2} \in E(\mathcal{T})$ , sodaß sich  $x_i$  und  $\tilde{x}_{i+1}$  und  $\tilde{x}_{i+1}$  und  $x_{i+2}$  jeweils auf einem Vierkreis gegenüberliegen. Also gilt für jedes  $i \in \{0, \dots, k-2\}$ :  $x_i \sim \tilde{x}_{i+1} \sim x_{i+2}$  und somit  $x \sim y$ , da  $k$  gerade ist.  $V(\mathcal{T})$  zerfällt also in höchstens zwei Äquivalenzklassen bezüglich  $\sim$ . (Siehe auch [ANS94])

Ist  $y$  mit  $x$  durch eine Kante verbunden, dann ist jeder  $x$ - $y$ -Weg von ungerader Länge,  $\mathcal{T}$  enthält ja nur Kreise gerader Länge. Wäre aber  $x \sim y$ , dann gäbe es einen diagonalen Weg  $x_0 \cdots x_k$  von  $x$  nach  $y$ .  $x_i$  und  $x_{i+1}$ ,  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , liegen sich dabei auf einem Vierkreis  $(u_i, x_i, u_{i+1}, x_{i+1})$  gegenüber und mit  $x = x_0 u_0 \cdots x_{k-1} u_{k-1} x_k = y$  gäbe es im Widerspruch zur Bipartitität von  $\mathcal{T}$  einen  $x$ - $y$ -Weg gerader Länge.

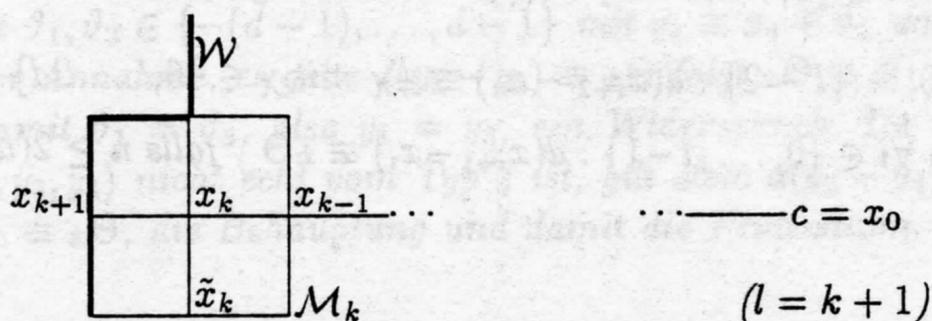
ii) Gibt es einen diagonalen  $x$ - $c$ -Weg, dann gilt nach Definition  $x \sim c$ .

Es gelte  $x \sim c$  und  $x \in U^{k+1}(c)$ . Dann gibt es einen Weg  $\mathcal{W} = x_0 \cdots x_l$ ,  $l \leq k+1$ , mit  $x_0 = x$ ,  $x_l = c$  und  $x_i \sim x_{i+2}$  für  $0 \leq i \leq l-2$ .  $\mathcal{M}_i$  sei ein  $3 \times 3$ -Gitter mit  $x_i$  als Mittelpunkt.

Für jedes  $i \in \{1, \dots, l-1\}$  ist  $\mathcal{M}_i \cup \mathcal{M}_{i+1} \cong \mathcal{K}_2 \times \mathcal{P}_2$  und nach Proposition 2 ist jedes Gitter  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_{l-1}$  vom Typ 0 oder 4, da sonst ein  $x_i$ , wobei  $0 \leq i \leq l-1$ , auf einem trennenden Weg liegen würde.

Ist  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  ein zweidimensionaler Teilweg von  $\mathcal{W}$ , so gilt dann  $x_i \sim x_{i+2}$ .

Ist  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  ein eindimensionaler Teilweg von  $\mathcal{W}$ , dann gibt es für  $x_i$  eine auf einem Vierkreis gegenüberliegende Ecke  $\tilde{x}_{i+1}$  mit  $x_{i+1} \tilde{x}_{i+1} \in E(\mathcal{T})$ , sodaß  $x_i \sim \tilde{x}_{i+1} \sim x_{i+2}$  gilt.



Damit gilt für jedes gerade  $i \leq l-2$  eine der beiden folgenden Aussagen:

- (1)  $x_i - x_{i+2} \equiv \pm\Theta$ , falls  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  ein zweidimensionaler Teilweg von  $\mathcal{W}$  ist, beziehungsweise  $x_i - \tilde{x}_{i+1} \equiv \pm\Theta$  und  $\tilde{x}_{i+1} - x_{i+2} \equiv \pm\Theta$  sonst, oder  
 (2)  $d(x_i - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ , falls  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  ein zweidimensionaler Teilweg von  $\mathcal{W}$  ist, beziehungsweise  $d(x_i - \tilde{x}_{i+1}) \equiv \pm\Theta$  und  $d(\tilde{x}_{i+1} - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$  sonst.

Da wegen  $x \sim c \mathcal{W} = x_0 \dots x_l$  von gerader Länge ist, folgt die Behauptung.

iii) Zunächst sei angenommen, daß sich  $x$  und  $y$  nicht auf einem Vierkreis gegenüberliegen. Sei  $x = x_0 \dots x_l = y$  ein kürzester Weg  $\mathcal{W}$  von  $x$  nach  $y$  in  $\mathcal{T}$ . Wegen  $x \sim y$  ist  $x_0 \dots x_l$  von gerader Länge.

Ist  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  ein zweidimensionaler Teilweg von  $\mathcal{W}$ , dann gilt  $x_i \sim x_{i+2}$ . Liegen sich  $x_i$  und  $x_{i+2}$  auf einem echten Typ 4 Kreis gegenüber, dann gibt es einen Hyperwürfel  $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}_2^3$ , der  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  enthält und in  $\mathcal{H}$  eine Ecke  $\tilde{x}_{i+1}$ , die nach Proposition 1 sowohl  $x_i$  als auch  $x_{i+2}$  auf einem Vierkreis nicht vom Typ 4 gegenüberliegt, sodaß  $x_i - x_{i+1} \equiv \pm\Theta$  oder  $d(x_i - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ .

Sei  $x_i x_{i+1} x_{i+2}$  ein eindimensionaler Teilweg von  $\mathcal{W}$ . Für jedes  $i \in \{0, \dots, l-2\}$  sei  $\mathcal{H}_i \cong \mathcal{K}_2^3$  ein Würfel in  $\mathcal{T}$  mit  $x_i \in V(\mathcal{H}_i)$ , sodaß  $x_i x_{i+1}$  eine Kante von  $\mathcal{H}_i$  ist und  $\mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_{i+1} \cong \mathcal{K}_2^2$ . Für jedes  $x_i$  gibt es nun auf einem Vierkreis gegenüberliegende Ecken  $\tilde{x}_{i+1} \neq \tilde{\tilde{x}}_{i+1} \in V(\mathcal{H}_i)$ , sodaß  $x_{i+1} \tilde{x}_{i+1}$  und  $x_{i+1} \tilde{\tilde{x}}_{i+1} \in E(\mathcal{T})$ . Gilt  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$ , dann gilt für je zwei auf einem Vierkreis in  $\mathcal{T}$  sich gegenüberliegende Ecken  $x$  und  $y$ :  $x - y \equiv \pm\Theta$  oder  $d(x - y) \equiv \pm\Theta$ , wie in Proposition 1 gezeigt wurde. Mit Proposition 2 gilt dann:

für jedes gerade  $i \leq l-2$ :  $x_i - \tilde{x}_{i+1} \equiv \pm\Theta$  und  $\tilde{x}_{i+1} - x_{i+2} \equiv \pm\Theta$

oder für jedes gerade  $i \leq l-2$ :  $d(x_i - \tilde{x}_{i+1}) \equiv \pm\Theta$  und  $d(\tilde{x}_{i+1} - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ .

Mit  $y_i \in \{x_i, \tilde{x}_i\}$  ist  $x = x_0 y_1 x_2 \dots y_{l-1} x_l = y$  der gesuchte diagonale Weg.

Es soll jetzt der Fall betrachtet werden, daß  $\mathcal{T}$  Kreise echt vom Typ 4 enthält. Gibt es für jedes  $i$  ein  $y_{i+1} \in \{\tilde{x}_{i+1}, \tilde{\tilde{x}}_{i+1}\}$ , sodaß sich sowohl  $x_i$  und  $y_{i+1}$  als auch  $y_{i+1}$  und  $x_{i+2}$  auf einem Vierkreis vom Typ 1 oder 3 gegenüberliegen, so gilt wie oben

für jedes gerade  $i \leq l-2$ :  $x_i - y_{i+1} \equiv \pm\Theta$  und  $y_{i+1} - x_{i+2} \equiv \pm\Theta$

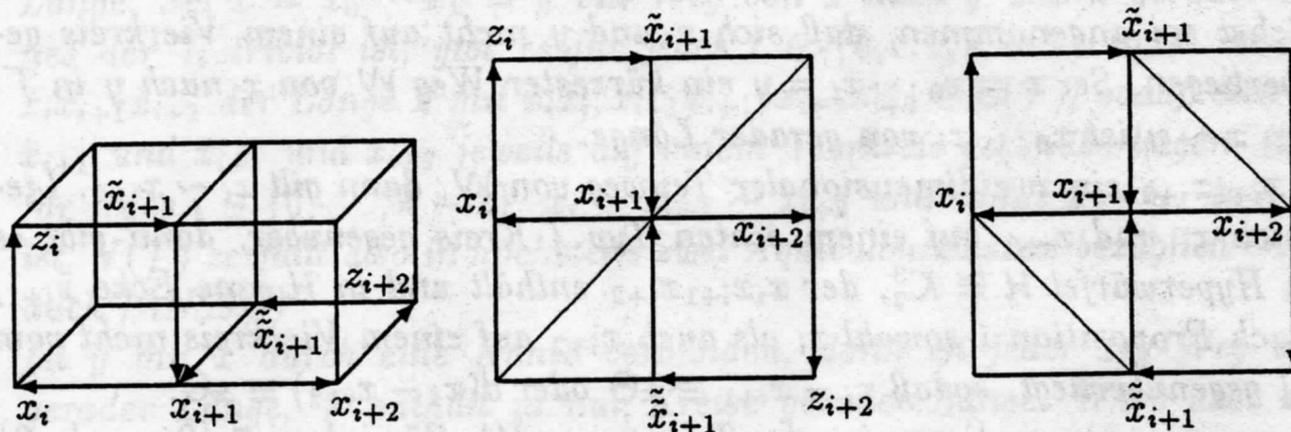
oder für jedes gerade  $i \leq l-2$ :  $d(x_i - y_{i+1}) \equiv \pm\Theta$  und  $d(y_{i+1} - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ ,

womit dann die Behauptung gezeigt wäre.

Es sei jetzt angenommen, daß in  $\mathcal{H}_i \cup \mathcal{H}_{i+1}$  jeder diagonale Weg von  $x_i$  nach  $x_{i+2}$  mit einer Länge kleiner oder gleich 2 über einen echten Typ 4 Kreis führt. Da nach Proposition 1 jeder dreidimensionale Hyperwürfel höchstens einen echten Typ 4 Kreis enthält und zwei Typ 4 Kreise mit Lemma 2.4 ii) keine gemeinsame Kante haben, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß sich  $x_i$  und  $\tilde{x}_{i+1}$  und  $\tilde{\tilde{x}}_{i+1}$  und  $x_{i+2}$  jeweils auf einem echten Typ 4 Kreis gegenüberliegen.

Dann liegen sich sowohl  $x_i$  und  $\tilde{x}_{i+1}$ ,  $\tilde{x}_{i+1}$  und  $\tilde{x}_{i+1}$  als auch  $\tilde{x}_{i+1}$  und  $x_{i+2}$  auf Kreisen vom Typ 1 oder 3 gegenüber.

Sei zunächst angenommen,  $d(x_i - \tilde{x}_{i+1}) \not\equiv \pm\Theta$ . Dann gilt  $x_i - \tilde{x}_{i+1} \equiv \pm\Theta$  und  $\tilde{x}_{i+1} - x_{i+2} \equiv \pm\Theta$  und  $\tilde{x}_{i+1} \rightarrow x_{i+1} \rightarrow x_i$  (1) oder  $x_i \rightarrow x_{i+1} \rightarrow \tilde{x}_{i+1}$  (2). Sei  $z_i$  beziehungsweise  $z_{i+2}$  die auf einem Typ 4 Kreis  $x_{i+1}$  gegenüberliegende Ecke, die zu  $x_i$  bzw.  $x_{i+2}$  benachbart ist.



$$d(x_i - \tilde{x}_i) \not\equiv \pm\Theta$$

Fall (1)

$$d(x_i - \tilde{x}_i) \equiv \pm\Theta$$

Es gilt  $d(z_i - z_{i+2}) \equiv \pm\Theta \pm \Theta$  und, da  $d^2 z_i + {}^{(2)}\Theta \equiv x_{i+1} \equiv d^2 z_{i+2} + {}^{(2)}\Theta$ , auch  $\pm {}^{(2)}\Theta \equiv d^2(z_i - z_{i+2}) \equiv \pm d(\Theta \pm \Theta)$ , also  $d(z_i - z_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ .

Da nun auch  $z_i \equiv d^2 x_{i+1} + {}^{(2)}\Theta$  und  $z_{i+2} \equiv d^2 x_{i+1} + {}^{(2)}\Theta$  gilt, folgt daraus  $\pm\Theta \equiv d(z_i - z_{i+2}) \equiv \pm d^2\Theta$  und damit:  $dz_i \equiv dz_{i+2}$ .

Aus (1) folgt dann  $z_i \rightarrow \tilde{x}_{i+1}$  und  $z_{i+2} \rightarrow \tilde{x}_{i+1}$ , das heißt:

$\pm\Theta \equiv d(\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_{i+1}) \equiv d(d(z_i - z_{i+2}) \pm \Theta) \equiv \pm d\Theta$ , also  $\tilde{x}_{i+1} = \tilde{x}_{i+1}$ , ein Widerspruch.

Gilt (2), so auch  $z_i \rightarrow x_i$  und  $z_{i+2} \rightarrow x_{i+2}$  und damit  $x_i = x_{i+2}$ , wiederum ein Widerspruch.

Es gilt also  $d(x_i - \tilde{x}_{i+1}) \equiv \pm\Theta$  und damit auch  $d(\tilde{x}_{i+1} - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ .

Gilt  $x_i \rightarrow x_{i+1}$ , so auch  $x_{i+2} \rightarrow x_{i+1}$  und damit  $d(x_i - x_{i+2}) \equiv \pm\Theta$ , die Behauptung.

Gilt  $x_{i+1} \rightarrow x_i$ , dann auch  $x_{i+1} \rightarrow x_{i+2}$  und also  $x_i - x_{i+2} \equiv \pm\Theta$ . Da aber  $\pm d\Theta \equiv d(x_i - x_{i+2}) \equiv \pm(\Theta \pm \Theta \pm \Theta)$  gilt, folgt  $d(x_i - x_{i+2}) \equiv \pm\chi$ , wobei  $\chi \in \{d, 2d\}$ .

Damit ist Proposition 3 iii) für den Fall, daß sich  $x$  und  $y$  nicht auf einem Vierkreis gegenüberliegen, gezeigt.

Liegen sich  $x$  und  $y$  auf einem Vierkreis gegenüber, gibt es nach Proposition 2 einen diagonalen Weg von  $x$  nach  $y$  mit einer Länge kleiner oder gleich 2, der erwünschten Länge, womit dann alle Behauptungen von Proposition 3 bewiesen wären.  $\square$

## 4 Die Sätze

### 4.1 Zwei Nichteinbettungssätze

Ist ein Produkt  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m$  von nichttrivialen Bäumen ein Teilgraph des  $G_B(d, n)$ , so läßt sich, sind die Voraussetzungen der drei Propositionen erfüllt, auf der Eckenmenge von  $\mathcal{T}$ , beziehungsweise eines Teilgraphen von  $\mathcal{T}$ , falls  $m = 2$ , eine Äquivalenzrelation erklären, die diese Eckenmenge in zwei Äquivalenzklassen  $\Pi$  und  $\Pi_d$  zerlegt, deren Mächtigkeit sich abschätzen läßt. Hier zeigt sich ein Unterschied der beiden Fälle  $d|n$  und  $d \nmid n$ : Für eine Ecke  $c \in V(\mathcal{T})$  wird es in beiden Fällen eine Abschätzung  $|\Pi \cap U^k(c)|, |\Pi_d \cap U^k(c)| \leq f(k)$  geben, wobei  $f(k)$  im ersten Fall ( $d|n$ ) eine Konstante ist, im zweiten aber linear von  $k$  abhängt. Zunächst soll der Fall  $d|n$  betrachtet werden.

**Satz 1** ( $d|n$ ) Seien  $n, m, d \geq 2$ ,  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m$ , wobei die  $\mathcal{G}_i$  einfache, zusammenhängende und nichttriviale Graphen sind. Es gelte  $d|n$ .

- i) Ist  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$ ,
- ii)  $m = 2$ ,  $|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$  und  $n \geq d^4$  oder
- iii)  $m = 2$  und  $n \geq d^5$ ,

dann ist  $\mathcal{G}$  kein aufspannender Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

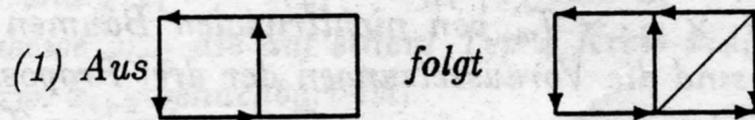
**Beweis:** Sei für  $i \in \{1, \dots, m\}$   $\mathcal{T}_i$  ein aufspannender Baum von  $\mathcal{G}_i$ ,  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m \subseteq G_B(d, n)$ . Sei  $\mathcal{T}'_i \subset \mathcal{T}_i$  so gewählt, daß  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_1 \times \dots \times \mathcal{T}'_m$  nur Vierkreise enthält, für deren sich gegenüberliegende Ecken  $x$  und  $y$  gilt:  $x - y \equiv \pm\Theta$  oder  $d(x - y) \equiv \pm\Theta$  und es für alle  $x, y$  mit  $x \sim y$  in  $\mathcal{T}'$  einen diagonalen Weg  $x = x_0 \dots x_k = y$  gibt, für den gilt:  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\} : d(x_i - x_{i+1}) \equiv \pm\Theta$ , also mit Lemma 2.1 i)  $dx_i \equiv dx_{i+1}$  oder  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\} : x_i - x_{i+1} \equiv \pm\Theta$ .

Für zwei Ecken  $x$  und  $y$  aus  $\mathcal{T}'$  mit  $x \sim y$  gilt dann:  $dx \equiv dy$  oder  $x - y \equiv \pm\Theta$ ,

da es, falls  $dx \not\equiv dy$ , zu  $x$  beziehungsweise  $y$  benachbarte Ecken  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  gibt mit  $d\tilde{x} \equiv d\tilde{y}$ . Also  $x - y \equiv d(\tilde{x} - \tilde{y}) \pm \Theta \equiv \pm\Theta$ . Jede der beiden durch  $\sim$  definierten Äquivalenzklassen von  $V(\mathcal{T}')$  enthält somit höchstens  $d$  Ecken, sodaß  $|V(\mathcal{T}')| \leq 2d$  gilt.

- Gilt  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$  oder  $m = 2$ ,  $|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$  und  $n \geq d^4$ , so ist mit den Propositionen 1, 2 und 3 für  $\mathcal{T}'_i = \mathcal{T}_i$  die Voraussetzung für die Vorbetrachtung erfüllt und daher:  $d^3 \leq n = |V(\mathcal{G})| \leq 2d$  oder  $d^4 \leq 2d$ , damit  $d < 2$ , ein Widerspruch.

- Sei jetzt  $m = 2$ ,  $n \geq d^5$  und ohne Einschränkung  $|\mathcal{G}_2| = 2$   
Da nach Lemma 2.3 i) jeder Typ 3 Kreis auch vom Typ 1 ist, gilt für jeden Typ 4 Kreis in  $\mathcal{T}$ :



Denn sonst inzidiert nach Lemma 2.3 i) der Typ 4 Kreis im Widerspruch zu Lemma 2.4 iii) mit einer Doppelkante.

(2)  $\mathcal{T}$  enthält höchstens einen Typ 4 Kreis

denn: Mit Lemma 2.4 i) haben zwei Typ 4 Kreise in  $\mathcal{T}$  keine gemeinsame Ecke. Seien  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  und  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  zwei Typ 4 Kreise, zwischen denen nur Kreise vom Typ 1 oder 3 liegen. Es gibt dann  $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ , sodaß mit Lemma 2.3 i)  $dx_i \equiv dy_j$ , ohne Einschränkung  $i = j = 1$ . Weiterhin gibt es nun  $\theta_1, \dots, \theta_4$  und  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_4$ , sodaß:  $(1 - d^4)x_1 \equiv d^3\theta_1 + \dots + \theta_4$  und  $(1 - d^4)y_1 \equiv d^3\vartheta_1 + \dots + \vartheta_4$ , also:

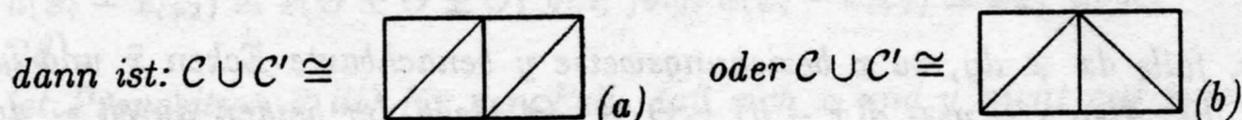
$$d^4\theta_1 + \dots + d\theta_4 \equiv (1 - d^4)dx_1 \equiv (1 - d^4)dy_1 \equiv d^4\vartheta_1 + \dots + d\vartheta_4.$$

Für  $n > d^5 - d$  ist also  $\theta_i = \vartheta_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , die beiden Typ 4 Kreise sind  $\text{mod } n'$  gleich. Aus (1) folgt nun (nach geeigneter Nummerierung der Ecken in den Typ 4 Kreisen):  $x_2 - y_2 \equiv \pm\Theta$ , sodaß die beiden Typ 4 Kreise  $\text{mod } n$  gleich sind, also  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  gilt, was die Behauptung (2) beweist.

Enthält  $\mathcal{T} \subset G_B(d, n)$  nur 4-Kreise vom Typ 1 oder 3, dann gilt:

$$(3) |\mathcal{V}(\mathcal{T})| \leq 2d(d^2 - d + 1)$$

denn: Sind  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{T}$  zwei 4-Kreise mit gemeinsamer Kante,



Im Fall (a) ist die gemeinsame Kante eine Doppelkante (Lemma 2.3 i)). Tritt in einem  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}'_1 \times \mathcal{T}'_2$  mit zusammenhängenden  $\mathcal{T}'_i \subset \mathcal{T}_i$  nur der Fall (b) für jeweils zwei solcher 4-Kreise mit gemeinsamer Kante auf, so ist  $|\mathcal{V}(\mathcal{T}')| \leq 2d$ . Da nun der  $G_B(d, n)$  höchstens  $d(d - 1)$  Doppelkanten enthält, gilt:

$$|\mathcal{V}(\mathcal{T})| \leq (d(d - 1) + 1)2d = 2d(d^2 - d + 1)$$

Mit (1), (2) und (3) folgt schließlich:  $d^5 \leq |\mathbf{V}(\mathcal{T})| \leq 4d(d^2 - d + 1)$ , damit  $d < 2$ , ein Widerspruch. Damit ist Satz 1 bewiesen.  $\square$

Die Aussage von Satz 1 kann in naheliegender Weise erweitert werden. Wird als Voraussetzung zusätzlich  $|\mathcal{G}| > 2d$ , falls  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$  oder  $m = 2$ ,  $|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$  und  $n \geq d^4$ , beziehungsweise  $|\mathcal{G}| > 2d(d^2 - d + 1)$ , falls  $m = 2$  und  $n \geq d^5$  gilt, gefordert, ist  $\mathcal{G} \notin G_B(d, n)$ , wie aus dem Beweis von Satz 1 hervorgeht.

Gilt also  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$

oder  $m = 2, |\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$  und  $n \geq d^4$  und ist  $|\mathcal{G}| > 2d$

oder  $m = 2, n \geq d^5$  und  $|\mathcal{G}| > 2d(d^2 - d + 1)$ ,

dann ist  $\mathcal{G}$  kein Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

Als nächstes soll der Fall  $d \nmid n$  betrachtet werden. Zur Vorbereitung von Satz 2 bedarf es noch der Einführung weiterer Begriffe:

**Definition 7** Sei  $\mathcal{G}$  ein einfacher, zusammenhängender Graph,  $x \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$ .

- i) Die Tiefe  $t_{\mathcal{G}}(x)$  von  $x$  in  $\mathcal{G}$  wird durch  $t_{\mathcal{G}}(x) = \min\{k : x = x_0 \cdots x_k \text{ ist ein einfacher Weg mit } \text{Grad}(x_k) = 1 \text{ oder } x_0 = x_k\}$  definiert.
- ii) Für  $x \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$  bezeichne  $\varepsilon(x) := \max_{y \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} \{d(x, y)\}$  die Exzentrizität von  $x$ . Eine Ecke  $x \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$  mit minimaler Exzentrizität heißt ein Zentrum von  $\mathcal{G}$ . Die maximale für eine Ecke in  $\mathcal{G}$  auftretende Exzentrizität heißt Durchmesser von  $\mathcal{G}$ ,  $\text{diam}(\mathcal{G}) = \max_{x, y \in \mathbf{V}(\mathcal{G})} \{d(x, y)\}$ .
- iii) Ist  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \cdots \times \mathcal{G}_m$ ,  $m \geq 2$ , ein Produkt einfacher, zusammenhängender, nichttrivialer Graphen und  $g_i = |\mathcal{G}_i|$  für  $i \in \{1, \dots, m\}$ , dann ist das zu  $\mathcal{G}$  gehörige Gitter  $M_{\mathcal{G}}$  durch  $M_{\mathcal{G}} = M(g_1, \dots, g_m)$  definiert.

**Satz 2** ( $d \nmid n$ ) Sei  $m \geq 2$ , die  $G_i$  einfache, zusammenhängende und nichttriviale Graphen und  $G := G_1 \times \dots \times G_m$ . Es gelte  $d \nmid n$ . Gilt:

- i)  $m = 2$ ,  $n \geq d^4$  und gibt es eine Ecke  $c = (c_1, c_2)$  aus  $V(G)$  und für  $i = 1, 2$  jeweils ein gerades  $k_i$ ,  $4 \leq k_i \leq t_{G_i}(c_i) - 1$  mit  $k = \max\{k_1, k_2\}$  und  $|R^{k_1, k_2}(c)| > 4k(d-1) + ggT(d, n) + 1$ , wobei  $R^{k_1, k_2}(c) := U_{in G}^k(c) \cap (U_{in G_1}^{k_1}(c_1) \times U_{in G_2}^{k_2}(c_2))$ ,
- ii) oder  $m \geq 3$ ,  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$  und es gibt ein gerades  $k$  und eine Ecke  $c \in V(G)$  mit  $|U^k(c)| > 4k(d-1) + ggT(d, n) + 1$ ,
- iii) oder  $m \geq 3$ ,  $n \geq d^3$  und es gibt ein gerades  $k$  und eine Ecke  $c \in V(G)$  mit  $|U^k(c)| > 2k(2d-1) + ggT(d, n) + 1$ ,

dann ist  $G$  kein Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

Beweis: Sei  $m \geq 2$ ,  $G = G_1 \times \dots \times G_m$  mit nichttrivialen, einfachen und zusammenhängenden Graphen  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $c = (c_1, \dots, c_m)$  eine beliebige, aber von jetzt an fest gewählte Ecke von  $G$ . Sei für  $i \in \{1, \dots, m\}$   $T_i$  bezüglich  $c_i$  ein kürzester Wege Baum von  $G_i$ , das heißt ein aufspannender Teilbaum mit Wurzel  $c_i$ , in dem jeder Weg von der Wurzel zu einem beliebigen Knoten ein kürzester Weg in  $G_i$  ist,  $T := T_1 \times \dots \times T_m$ . Es genügt zu zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes  $T$  kein Teilgraph des  $G_B(d, n)$  ist. Es sei angenommen,  $T \subset G_B(d, n)$ .

Zunächst ein paar Vorbetrachtungen:

$$\text{Es gilt: (1) } U_{in T}^k(c) = U_{in G}^k(c)$$

denn: Daß  $U_{in T}^k(c) \subseteq U_{in G}^k(c)$  gilt, ist trivial. Für die andere Richtung sei  $x \in U_{in G}^k(c)$  beliebig. Dann gibt es einen kürzesten Weg von  $c$  nach  $x$  in  $G$  einer Länge  $l \leq k$ . Haben kürzeste Wege in  $G_i$  von  $c_i$  nach  $x_i$  die Länge  $l_i$ , dann ist  $l_1 + \dots + l_m = l$ , da zwei in  $G$  benachbarte Ecken sich in genau einer Komponente  $j$  unterscheiden und  $c_j$  und  $x_j$  in  $G_j$  benachbart sind. Da nun die  $T_i$  kürzeste Wege Bäume bezüglich  $c_i$  sind, gibt es in jedem  $T_i$  einen Weg von  $c_i$  nach  $x_i$  mit einer Länge  $\leq l_i$  und also in  $T$  einen  $c$ - $x$ -Weg einer Länge  $l \leq k$ . Damit gilt die Behauptung.

Es sei zunächst angenommen, in  $T \subset G_B(d, n)$  ist jeder Vierkreis vom Typ 1 oder 3. Mit den Propositionen 2 und 3 teilt  $\sim$  die Eckenmenge  $V(T)$  in zwei Äquivalenzklassen, die im Folgenden mit  $\Pi$  und  $\Pi_d$  bezeichnet werden sollen. Ohne Einschränkung sind zwei Ecken  $x, y \in T$  genau dann in  $\Pi$ , wenn  $x - y \equiv \pm \Theta$ . Sei  $\tilde{c}$  zu  $c$  in  $T$  benachbart und ohne Einschränkung  $c \in \Pi_d$  und  $\tilde{c} \in \Pi$ , es ist ja  $c \not\sim \tilde{c}$ .

Sei weiterhin  $k$  eine gerade natürliche Zahl und  $x \in U^k(c)$ . Trivialerweise gilt  $d(x, c) \leq k$  und  $d(x, \tilde{c}) \leq k + 1$ . Ist  $x \not\sim c$ , dann gilt  $x \sim \tilde{c}$  und  $d(x, \tilde{c})$  ist gerade. Wäre  $d(x, \tilde{c}) > k$ , dann  $d(x, \tilde{c}) \geq k + 2$  und damit  $d(x, c) \geq d + 1$  im Widerspruch zu  $x \in U^k(c)$ . Es gilt also  $U^k(c) \subseteq (U^k(c) \cap \Pi) \dot{\cup} (U^k(c) \cap \Pi_d)$ . Für jedes  $x$  aus  $\Pi \cap U^k(c)$  gilt  $x \sim \tilde{c}$  und  $d(x, \tilde{c}) \leq k$ , denn  $k$  ist gerade. Also ist  $x \in U^k(\tilde{c}) \cap \Pi$  und:

$$U^k(c) \subseteq (U^k(\tilde{c}) \cap \Pi) \dot{\cup} (U^k(c) \cap \Pi_d).$$

Ist  $k = \max\{\varepsilon(c), \varepsilon(\tilde{c})\}$ , dann gilt auch dann, wenn  $k$  ungerade ist,

$$V(\mathcal{T}) = U^{\varepsilon(c)}(c) = (U^{\varepsilon(c)}(\tilde{c}) \cap \Pi) \dot{\cup} (U^{\varepsilon(c)}(c) \cap \Pi_d).$$

Es sei im Weiteren  $m = 2$ ,  $n \geq d^4$  und  $|\mathcal{T}_1|, |\mathcal{T}_2| \geq 3$  oder  $m \geq 3$  und  $n \geq d^3$ . Sei  $x \in U^k(c)$ .

- $x \in \Pi$

Nach den Propositionen 2 und 3 gibt es einen diagonalen Weg  $\tilde{c} = x_0 \cdots x_l = x$  mit  $l \leq k$  und  $\forall i \in \{0, \dots, l-1\} : x_i - x_{i+1} \equiv \pm \Theta$ . Damit gilt aber

$$(2) \quad x - \tilde{c} \equiv \chi \text{ mit einem } \chi \in \{-k(d-1), \dots, k(d-1)\}$$

Für ein festes  $\tilde{c}$  hat (2) höchstens  $2k(d-1)$  Lösungen für  $x \neq \tilde{c}$ , ist also  $|U^k(c) \cap \Pi| \leq 2k(d-1) + 1$ .

- $x \in \Pi_d$  und  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$

Wiederum gibt es nach Proposition 2 und 3 einen diagonalen Weg  $c = x_0 \cdots x_l = x$  mit  $l \leq k$  und  $\forall i \in \{0, \dots, l-1\} : d(x_i - x_{i+1}) \equiv \pm \Theta$ . Damit gilt aber  $d(x - c) \equiv \chi$  mit einem  $\chi \in \{-k(d-1), \dots, k(d-1)\}$  und damit:

$$(3) \quad x - c \equiv d'^{-1} \chi'$$

mit einem  $\chi' \in \{0, \dots, kd' - \lceil \frac{k}{ggT(d,n)} \rceil\} \cup \{n' - kd' + \lceil \frac{k}{ggT(d,n)} \rceil, \dots, n' - 1\}$ .

(3) hat höchstens  $kd' - \lceil \frac{k}{ggT(d,n)} \rceil + 1 + n' - 1 - (n' - kd' + \lceil \frac{k}{ggT(d,n)} \rceil) + 1 = 2kd' - 2\lceil \frac{k}{ggT(d,n)} \rceil + 1$  Lösungen für  $x \pmod{n'}$ , also höchstens  $2kd - 2ggT(d,n)\lceil \frac{k}{ggT(d,n)} \rceil + ggT(d,n) \leq 2k(d-1) + ggT(d,n)$  Lösungen  $\pmod{n}$ . Damit gilt  $|U^k(c) \cap \Pi_d| \leq 2k(d-1) + ggT(d,n)$  und

$$|U^k(c)| \leq 4k(d-1) + ggT(d,n) + 1, \text{ falls } n \geq 2(d^3 - d^2 + d).$$

- $x \in \Pi_d$  und  $n \geq d^3$

Mit Proposition 3 gibt es einen diagonalen Weg  $c = x_0 \cdots x_l = x$  mit  $l \leq k$ .  
 Ist  $l$  gerade, dann gilt für jedes  $i$  aus  $\{1, \dots, l-2\}$ :  $d(x_i - x_{i+1}) \equiv \pm\Theta$  oder  
 $d(x_i - x_{i+2}) \equiv \pm\chi_i$  oder  $d(x_{i-1} - x_{i+1}) \equiv \pm\chi_i$  mit einem  $\chi_i \in \{0, \dots, 2d\}$  und  
 es gilt:  $d(x_{l-1} - x_l) \equiv \pm\Theta$  oder  $d(x_{l-2} - x_l) \equiv \pm\chi_{l-1}$  beziehungsweise  
 $d(x_0 - x_1) \equiv \pm\Theta$  oder  $d(x_0 - x_2) \equiv \pm\chi_0$  mit  $\chi_0, \chi_{l-1} \in \{0, \dots, 2d\}$ .  
 Das heißt, da  $k$  gerade,  $d(x-c) \equiv \chi$  mit einem  $\chi \in \{-kd, \dots, kd\}$  und damit:

$$(4) \quad x - c \equiv d'^{-1}\chi' \text{ mit einem } \chi' \in \{0, \dots, kd'\} \cup \{n' - kd', \dots, n' - 1\}$$

(4) hat nun  $\text{mod } n'$  höchstens  $kd' + 1 + (n' - (n' - kd')) = 2kd' + 1$  Lösungen,  
 also  $|\mathbf{U}^k(c) \cap \Pi_d| \leq 2kd + \text{ggT}(d, n)$ . Damit ist:

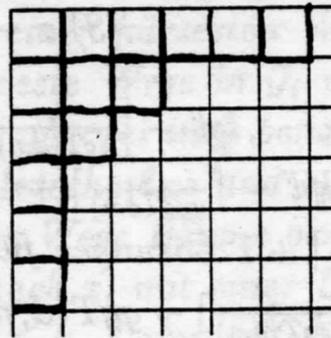
$$|\mathbf{U}^k(c)| \leq 2k(2d - 1) + \text{ggT}(d, n) + 1.$$

- i) Sei  $m = 2$ ,  $n \geq d^4$  und es gibt eine Ecke  $c = (c_1, c_2)$  aus  $\mathbf{V}(\mathcal{G})$  und für  $i = 1, 2$   
 jeweils ein gerades  $k_i$  mit  $4 \leq k_i \leq t_{\mathcal{G}_i}(c_i) - 1$  mit  $k = \max\{k_1, k_2\}$  und  
 $|\mathbf{R}^{k_1, k_2}(c)| > 4k(d - 1) + \text{ggT}(d, n) + 1$ ,  
 wobei  $\mathbf{R}^{k_1, k_2}(c) := \mathbf{U}_{\text{in } \mathcal{G}}^k(c) \cap (\mathbf{U}_{\text{in } \mathcal{G}_1}^{k_1}(c_1) \times \mathbf{U}_{\text{in } \mathcal{G}_2}^{k_2}(c_2))$ .

Ist  $\mathcal{C}$  ein Vierkreis, dessen alle vier Ecken in  $\mathbf{R}^{k_1, k_2}(c)$  enthalten sind, so ist  $\mathcal{C}$   
 vom Typ 1 oder 3 und enthält keine Kante eines trennenden Weges.

denn: Seien alle vier Ecken von  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{R}^{k_1, k_2}(c)$  enthalten,  $\mathcal{M}$  ein  
 $(2k_1 + 3) \times (2k_2 + 3)$ -Gitter mit Zentrum  $c$  und  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ , welches  
 existiert, da es nach Voraussetzung in jedem  $\mathcal{T}_i$  einen Weg der Länge  
 $2t_{\mathcal{T}_i}(c_i) \geq 2(k_i + 1)$  mit Zentrum  $c_i$  gibt. Da nach Proposition 1  $\mathcal{T}$   
 und damit auch  $\mathcal{M}$  Typ 4 Kreise höchstens als Eckkreise enthält und  
 nach Proposition 2 trennende Wege eine Länge kleiner als 6 haben,  
 geben die dick

gezeichneten Linien  
 in der Skizze rechts  
 alle Möglichkeiten  
 für trennende Wege  
 in einem Quadranten  
 von  $\mathcal{M}$  wieder.



Da  $4 \leq k_i \leq t_{\mathcal{T}_i}(c_i) - 1$ , folgt die Behauptung mit Proposition 3 ii).

Aus den Vorbetrachtungen folgt nun  $|\mathbf{R}^{k_1, k_2}(c)| \leq 4k(d - 1) + \text{ggT}(d, n) + 1$ ,  
 im Widerspruch zur Voraussetzung.

- ii) Sei  $m \geq 3$ ,  $n \geq 2(d^3 - d^2 + d)$  und es gibt ein gerades  $k$  und eine Ecke  $c \in \mathbf{V}(\mathcal{G})$   
 mit  $|\mathbf{U}^k(c)| > 4k(d - 1) + \text{ggT}(d, n) + 1$ .

Mit Proposition 1 und 2 und den Vorbetrachtungen folgt im Widerspruch dazu  $|U^k(c)| \leq 4k(d-1) + ggT(d, n) + 1$ .

iii) Sei schließlich  $m \geq 3$ ,  $n \geq d^3$  und es gibt ein gerades  $k$  und eine Ecke  $c \in V(\mathcal{G})$  mit  $|U^k(c)| > 2k(2d-1) + ggT(d, n) + 1$ .

Auch hier folgt mit den Propositionen und den Vorbetrachtungen  $|U^k(c)| \leq 2k(2d-1) + ggT(d, n) + 1$ , ein Widerspruch.

Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.  $\square$

Für  $d = 2$  lassen sich die Aussagen von Satz 1 und 2 noch ein wenig verbessern. Da dieser Fall für die Anwendung von de Bruijn Graphen als Modell für Netzwerke von besonderer Bedeutung sind, sollen diese Ergebnisse in einem weiteren Korollar erwähnt werden.

**Korollar 1 (d=2)** i) Ist  $n \geq 16$  und sind  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  einfache, zusammenhängende und nichttriviale Graphen, dann ist  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  kein aufspannender Teilgraph des  $G_B(2, n)$ .

ii) Gilt obendrein für  $g_i = |\mathcal{G}_i|$ :

$$g_1 \geq g_2 \geq 3 \text{ und } g_1 g_2 > 2(g_1 + g_2) + 7 \text{ oder } g_1 \geq 14 \text{ oder } g_2 \geq 6,$$

dann ist  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$  kein Teilgraph des  $G_B(2, n)$ .

denn: i) Für jedes  $d \geq 2$  liegt 0 nicht auf einem Typ 4 Kreis, falls  $n \geq d^4$ , da sonst  $0 \equiv (1 - d^4)0 \equiv \pm^{(4)}\Theta$  gelten würde und damit  $\pm^{(4)}\Theta = 0$ . Jede Ecke in diesem Typ 4 Kreis wäre dann gleich 0. Gilt  $\mathcal{G} \times \mathcal{K}_2 \subseteq G_B(2, n)$ , dann liegt also die mit 0 bezeichnete Ecke auf einem Vierkreis vom Typ 1 oder 3. Damit ist aber  $\text{Grad}_{in}(0) = 2$  oder  $\text{Grad}_{aus}(0) = 2$ , ein Widerspruch, da 0 mit einer Schlinge inzidiert.

ii) Da  $g_1, g_2 \geq 3$ , ist  $m = 2$ . Ist  $n \geq 16$  und erfüllen  $g_1$  und  $g_2$  die Voraussetzungen des Korollars, dann gilt  $g_1 g_2 > 2(g_1 + g_2 + 2) + 3$  und für jedes Zentrum  $c$  von  $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ :

$$U^{\lceil \frac{g_1}{2} \rceil + \lceil \frac{g_2}{2} \rceil}(c) = U^{\varepsilon(c)}(c) = V(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2)$$

$$\text{und } g_1 g_2 > 2(g_1 + g_2 + 2) + 3 \geq 2\left(\left\lceil \frac{g_1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{g_2}{2} \right\rceil\right)(2-1) + ggT(2, n) + 1.$$

Also ist dann  $\mathcal{G} \not\subseteq G_B(2, n)$ .

## 4.2 Einige Abschätzungen

Zum Schluß sollen noch ein paar hinreichende Bedingungen für Graphenprodukte gefunden werden, die die Voraussetzung von Satz 2 erfüllen. Sei im Folgenden für ein Produkt  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m$  einfacher, zusammenhängender und nichttrivialer Graphen  $g_i = |\mathcal{G}_i|$ ,  $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{G}_i$  aufspannende Bäume,  $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m$  und  $M_{\mathcal{G}}$  das zu  $\mathcal{G}$  gehörige Gitter.

**Lemma 4.1** Sei  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_m$  ein kartesisches Produkt einfacher Bäume.

- i) Für alle  $x, y \in \mathcal{T}$  ist  $d_{in\mathcal{T}}(x, y) = \sum_{i=1}^m d_{in\mathcal{T}_i}(x_i, y_i)$ .
- ii)  $c = (c_1, \dots, c_m)$  ist genau dann ein Zentrum von  $\mathcal{T}$ , wenn für jedes  $i$   $c_i$  ein Zentrum von  $\mathcal{T}_i$  ist.
- iii) Ein Baum hat höchstens zwei Zentren und für ein Zentrum  $c$  eines Baumes  $\mathcal{T}_i$  ist  $\text{diam}(\mathcal{T}_i) \in \{2\varepsilon(c), 2\varepsilon(c) - 1\}$ .

denn: i) In einem kartesischen Produkt einfacher, zusammenhängender Graphen  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m$  unterscheiden sich zwei benachbarte Ecken  $x = (x_1, \dots, x_m)$  und  $y = (y_1, \dots, y_m)$  in genau einer Komponente  $j$ , wobei dann  $x_j$  und  $y_j$  in  $\mathcal{G}_j$  benachbart sind. Für je zwei Ecken  $x$  und  $y$  gibt es daher genau dann einen Weg der Länge  $l$ , wenn es für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  einen Weg der Länge  $l_i$  von  $x_i$  nach  $y_i$  gibt und  $\sum_{i=1}^m l_i = l$ . Damit folgt die Behauptung.

ii) folgt unmittelbar aus zu i).

iii) folgt durch Induktion aus der Beobachtung, daß ein Zentrum eines Baumes Zentrum bleibt, wenn dem Baum alle Blätter entfernt werden. (Siehe [J94])

**Definition 8** Seien  $(X_1, \delta_1)$  und  $(X_2, \delta_2)$  metrische Räume. Gibt es eine injektive Abbildung  $\Phi : X_1 \rightarrow X_2$ , sodaß für je zwei Elemente  $x$  und  $y$  aus  $X_1$  gilt:  $\delta_2(\Phi(x), \Phi(y)) = \delta_1(x, y)$ , dann heißt  $X_1$  isometrisch in  $X_2$  einbettbar. Ist obendrein  $\Phi$  bijektiv, dann heißen  $X_1$  und  $X_2$  isometrisch.

Sei für ein gegebenes  $m$  und  $l$  wie folgt ein metrischer Raum definiert:

$$X_{m,l} = (\mathbb{Z}^l \times \{0, 1\}^{m-l}, \delta) \text{ mit}$$

$$\delta((y_1, \dots, y_l, (a_1, \dots, a_{m-l})), (z_1, \dots, z_l, (b_1, \dots, b_{m-l}))) = \sum_{i=1}^l |y_i - z_i| + \sum_{i=1}^{m-l} |a_i - b_i|.$$

Mit  $K_{m,l}^k$  werden dann in  $X_{m,l}$  folgenderweise  $k$ -Kugeln um 0 definiert:

$$K_{m,l}^k = \{x = (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : \delta(x, 0) \leq k\}.$$

$$\text{Es ist dann: } K_{m,l}^k = \{x = (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : \sum_{i=1}^l |z_i| + \sum_{i=1}^{m-l} a_i \leq k\}.$$

**Lemma 4.2** i) Für alle  $k \geq 0$  und Zentren  $c \in V(\mathcal{T}_G)$  gibt es eine Bijektion  $\Phi : V(\mathcal{T}_G) \longleftrightarrow V(\mathcal{M}_G)$ , der Eckenmengen, die  $c$  auf ein Zentrum von  $\mathcal{M}_G$  abbildet mit  $|U_{in \mathcal{T}_G}^k(c)| \geq |U_{in \mathcal{M}_G}^k(\Phi(c))|$ .

ii) Sei  $\mathcal{M}_G$  als metrischer Raum definiert mit der Länge  $d(x, y)$  eines kürzesten Weges zwischen zwei Ecken  $x$  und  $y$  als Metrik. Dann ist  $\mathcal{M}_G$  isometrisch in  $(X_{m,l}, \delta)$  einbettbar. Ist  $c$  ein Zentrum von  $\mathcal{M}_G$ , gilt  $\forall J \subset \{1, \dots, m\}$   $|U_{in \mathcal{T}_G}^k(c)| \geq |K_{m,|J|}^k|$ , falls  $1 \leq k \leq \min_{j \in J} \lfloor \frac{g_j-1}{2} \rfloor$ .

iii) Es ist  $\forall 0 \leq l \leq m : |K_{m,l}^0| = 1$ ,  $\forall 0 \leq k \leq m : |K_{m,0}^k| = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i}$ ,  
 $\forall k \geq m : |K_{m,0}^k| = 2^m$  und  $\forall 1 \leq k, 1 \leq l \leq m : |K_{m,l}^k| = \sum_{j=0}^k |K_{m,l-1}^j|$ .

iv) Ist  $c$  ein Zentrum von  $\mathcal{T}_G$ , so gilt  $V(\mathcal{G}) = U^{\lfloor \frac{g_1}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{g_l}{2} \rfloor}(c)$ .

denn: i) Um dies einzusehen, sollen die Ecken von  $\mathcal{T}_G$  und von  $\mathcal{M}_G$  wie folgt nummeriert werden: Sei für  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $j \in \{1, \dots, \tilde{k}\}$ ,  $\tilde{k} \leq |\mathcal{G}|$ , und ein Zentrum  $\tilde{c}$  von  $\mathcal{M}_G$   $k_i = |\{x : d_{\mathcal{T}_G}(c, x) = i\}|$  und  $m_j = |\{x : d_{\mathcal{M}_G}(x, \tilde{c}) = j\}|$ . Mit Lemma 4.1 i) ist dann für jedes  $i \leq k : k_i \geq m_i$ , da

$\text{Grad}_{\max}(\mathcal{M}_G) \leq \text{Grad}_{\max}(\mathcal{T}_G)$ . Damit läßt sich eine Bijektion

$\Phi : V(\mathcal{T}_G) \rightarrow V(\mathcal{M}_G)$  konstruieren, sodaß für jedes  $x \in V(\mathcal{T}_G)$  gilt:

$d_{in \mathcal{T}_G}(x, c) \leq d_{in \mathcal{M}_G}(\Phi(x), \Phi(c))$ . Dann gilt  $|U_{in \mathcal{T}_G}^k(c)| = |\Phi(U_{in \mathcal{T}_G}^k(c))|$ ,

also  $\tilde{k} \geq k$ . Es folgt:  $U_{in \mathcal{M}_G}^k(\Phi(c)) \subseteq \Phi(U_{in \mathcal{T}_G}^k(c))$ , die Behauptung.

ii) Es ist  $\mathcal{M}_G \cong \mathcal{P}_{g_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{g_l} \times \mathcal{K}_2^{m-l}$ ,  $g_i \geq 3$ . Für  $x = (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l}))$  und  $y = (y_1, \dots, y_l, (b_1, \dots, b_{m-l}))$  mit  $x_i, y_i \in V(\mathcal{P}_{g_i})$  und  $(a_1, \dots, a_{m-l}), (b_1, \dots, b_{m-l}) \in V(\mathcal{K}_2^{m-l})$  ist dann nach Lemma 4.1 i) :

$d(x, y) = \sum_{i=1}^l d_{\mathcal{P}_{g_i}}(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^{m-l} d_{\mathcal{K}_2^{m-l}}(a_i, b_i)$ . Sei  $J \subseteq \{1, \dots, m\}$  eine Indexmenge, mit der geforderten Eigenschaft,  $c = (c_1, \dots, c_m)$  ein Zentrum von  $\mathcal{M}_G$  und ohne Einschränkung  $g_1 \geq \dots \geq g_m$ , also  $J \subseteq \{1, \dots, l\}$ . Da  $\forall i \in J : k \leq \lfloor \frac{g_i-1}{2} \rfloor$  und damit  $k \leq \varepsilon(c_i)$  für  $i \in J \subseteq \{1, \dots, l\}$  gilt, ist

$U_{in \mathcal{M}_G}^k(c) \subset V(\mathcal{P}_{g_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{g_l} \times \mathcal{K}_2^{m-l})$  und  $U_{in \mathcal{M}_G}^k(c)$  isometrisch zu  $K_{m,l}^k$  mit einer Isometrie, die  $c$  auf die 0 abbildet und jede Ecke aus  $U^k(c)$  auf  $x = (d_{\mathcal{P}_{g_1}}(c_1, x_1), \dots, d_{\mathcal{P}_{g_l}}(c_l, x_l), b_1, \dots, b_{m-l})$ . Da nun  $k \geq 1$  und für jedes  $i \in J$  gilt  $g_i \geq 3$ , folgt mit Lemma 4.2 i) die Behauptung.

iii) Es ist:  $\mathbf{K}_{m,l}^0 = \{(x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : \sum_{i=1}^l |x_i| + \sum_{i=1}^{m-l} a_i \leq 0\} = \{0\}$ ,

$$\mathbf{K}_{m,0}^k = \{(a_1, \dots, a_m) : \sum_{i=1}^m a_i \leq k\} = \bigcup_{j=0}^k \{(a_1, \dots, a_m) : \sum_{i=1}^m a_i = j\}$$

und damit:  $|\mathbf{K}_{m,0}^k| = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i}$ , falls  $k \leq m$ , und  $|\mathbf{K}_{m,0}^k| = 2^m$ , falls  $k \geq m$ .

$$\text{Schließlich gilt: } \mathbf{K}_{m,l}^k = \left\{ (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : \sum_{i=1}^l |x_i| + \sum_{i=1}^{m-l} a_i \leq k \right\}$$

$$= \bigcup_{j=0}^k \left\{ (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : |x_l| = j \text{ und } \sum_{i=1}^{l-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{m-l} a_i \leq k - j \right\}$$

$$= \bigcup_{j=0}^k \left\{ (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : x_l = j \text{ und } \sum_{i=1}^{l-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{m-l} a_i \leq k - j \right\}$$

$$\cup \bigcup_{j=1}^k \left\{ (x_1, \dots, x_l, (a_1, \dots, a_{m-l})) : x_l = -j \text{ und } \sum_{i=1}^{l-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{m-l} a_i \leq k - j \right\}.$$

$$\text{Damit ist dann: } |\mathbf{K}_{m,l}^k| = \sum_{j=0}^k |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^{k-j}| + \sum_{j=1}^k |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^{k-j}|$$

$$= \sum_{j=1}^k (|\mathbf{K}_{m-1,l-1}^j| + |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^{j-1}|) + |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^0|.$$

$$\text{Weiterhin gilt: } \mathbf{K}_{m,l-1}^k = \left\{ (x_1, \dots, x_{l-1}, (a_1, \dots, a_{m-l+1})) : \sum_{i=1}^l |x_i| + \sum_{i=0}^{m-l+1} a_i \leq k \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, \dots, x_{l-1}, (a_1, \dots, a_{m-l}, 0)) : \sum_{i=1}^l |x_i| + \sum_{i=0}^{m-l} a_i \leq k \right\}$$

$$\cup \left\{ (x_1, \dots, x_{l-1}, (a_1, \dots, a_{m-l,1})) : \sum_{i=1}^l |x_i| + \sum_{i=0}^{m-l} a_i \leq k - 1 \right\},$$

$$\text{also: } |\mathbf{K}_{m,l-1}^k| = |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^k| + |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^{k-1}|.$$

$$\text{Damit ist: } |\mathbf{K}_{m,l}^k| = \sum_{j=1}^k (|\mathbf{K}_{m-1,l-1}^j| + |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^{j-1}|) + |\mathbf{K}_{m-1,l-1}^0| = \sum_{j=0}^k |\mathbf{K}_{m,l-1}^j|.$$

iv) Die Behauptung gilt, da mit Lemma 4.1 i) und iii)  $\varepsilon(c) \leq \sum_{i=1}^m \lceil \frac{q_i}{2} \rceil$ .

In der folgenden Betrachtung sei stets  $m, d \geq 3$ ,  $n \geq d^3$  und ohne Einschränkung  $g_1 \geq \dots \geq g_m$ .

Die Rekursion von Lemma 4.2 iii) gestattet es, einen expliziten Ausdruck für  $|\mathbf{K}_{m,l}^k|$  zu finden: Sei  $B_{m,l}^k$  für  $k \leq m$  definiert durch:

$$B_{m,0}^k = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \text{ und } B_{m,l}^k = \sum_{i=0}^k B_{m,l-1}^i$$

$$\text{Dann ist für } k \leq m: |\mathbf{K}_{m,l}^k| = B_{m,l}^k = \sum_{i_0=0}^k \sum_{i_1=0}^{i_0} \dots \sum_{i_l=0}^{i_{l-1}} \binom{m}{i_l}$$

$$\text{Für } k \geq m \text{ ist dann: } |\mathbf{K}_{m,l}^k| = B_{m,l}^m + \sum_{i=m+1}^k |\mathbf{K}_{m,l-1}^i|$$

$$= B_{m,l}^m + (k-m)B_{m,l-1}^m + \sum_{i=m+1}^k \left( \sum_{i_{l-1}=m+1}^{i_l} |\mathbf{K}_{m,l-2}^{i_{l-1}}| \right)$$

$$= B_{m,l}^m + (k-m)B_{m,l-1}^m + \dots + (k-m)^l B_{m,0}^m + \sum_{i_1=m+1}^k \sum_{i_2=m+1}^{i_1} \dots \sum_{i_l=m+1}^{i_{l-1}} |\mathbf{K}_{m,0}^{i_1}|$$

$$= B_{m,l}^m + (k-m)B_{m,l-1}^m + \dots + (k-m)^l B_{m,0}^m + 2^m \sum_{i_1=1}^{k-m} \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} 1$$

$$= B_{m,l}^m + (k-m)B_{m,l-1}^m + \dots + (k-m)^l B_{m,0}^m + \frac{2^m}{l!} (m-k)(m-k+1) \dots (m-k+l-1).$$

Ist nun  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$ , lassen sich aus Satz 2 für gerade  $k$  folgende Abschätzungen ableiten:

$$(1) |\mathbf{K}_{m,l}^k| \leq |\mathbf{U}_{T_G}^k(c)| = |\mathbf{U}_G^k(c)| \leq \begin{cases} 2k(2d-1) + \frac{d}{2} + 1, & n \geq d^3 \\ 4k(d-1) + \frac{d}{2} + 1, & n \geq 2(d^3 - d^2 + d) \end{cases}$$

$$(2) g_1 \dots g_l 2^{m-l} \leq \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^l g_i + 2m - l \right) (2d-1) + \frac{d}{2} + 1, & n \geq d^3 \\ 2 \left( \sum_{i=1}^l g_i + 2m - l \right) (d-1) + \frac{d}{2} + 1, & n \geq 2(d^3 - d^2 + d) \end{cases}$$

Aus  $\mathcal{G} \subseteq G_B(d, n)$  folgt zusätzlich:

$$(3) d^3 \leq n = g_1 \dots g_l 2^{m-l} \text{ also } d \leq \left\lfloor \sqrt[3]{g_1 \dots g_l 2^{m-l}} \right\rfloor$$

- Zunächst soll der Fall  $l = 0$  betrachtet werden, also  $\mathcal{G} = \mathcal{K}_2^m$ . In diesem Fall ist jede Ecke  $x$  von  $\mathcal{G}$  ein Zentrum von  $\mathcal{G}$  und  $\varepsilon(x) = m$ . Sei  $c \in \mathbf{V}(\mathcal{G}) \cap \Pi_d$  und ein Nachbar  $\tilde{c}$  von  $c$  fest gewählt. Dann ist für jedes  $m$ :  
 $2^m = |\mathbf{U}^m(c)| = |\mathbf{U}^m(c) \cap \Pi_d| + |\mathbf{U}^m(\tilde{c}) \cap \Pi| = 2^m$ . Da  $|\mathbf{U}^{m-1}(c)| = 2^m - 1$ , gilt dann auch:  $|\mathbf{U}^{m-1}(c) \cap \Pi_d| + |\mathbf{U}^{m-1}(\tilde{c}) \cap \Pi| \geq 2^m - 2$ , also  $|\mathbf{U}^{m-1}(c)| - 1 = 2^m - 2 \leq |\mathbf{U}^{m-1}(c) \cap \Pi_d| + |\mathbf{U}^{m-1}(\tilde{c}) \cap \Pi|$ .

Es gelte  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$  und es sei  $n \geq d^3$  und  $2^m \geq d^3$ , also  $d \leq \lfloor 2^{\frac{m}{3}} \rfloor$ .

Mit  $k = m - 1$  folgt aus (1):

$2^m - 2 \leq 2(m-1)(2 \lfloor 2^{\frac{m}{3}} \rfloor - 1) + \frac{1}{2} \lfloor 2^{\frac{m}{3}} \rfloor + 1$ . Gilt  $2^m \geq d^2$ , dann ergibt (1) mit  $k = m - 1$ :

$$2^m - 2 \leq 2(m-1)(2 \lfloor 2^{\frac{m}{2}} \rfloor - 1) + \frac{1}{2} \lfloor 2^{\frac{m}{2}} \rfloor + 1.$$

Sei jetzt  $l \geq 1$ . Dann läßt sich für  $d$  mit (1) bei  $n \geq d^3$  für jedes gerade  $k \leq m$  und jedes  $\lambda \leq l$  folgende Abschätzung ableiten:

$$B_{m,\lambda}^k \leq 2k(2d-1) + \frac{d}{2} + 1 \quad \text{und also:}$$

$$d \geq \left\lceil \frac{B_{m,\lambda}^k + 2k - 1}{4k + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^k(m, \lambda), \quad \text{falls } g_\lambda \geq 2k + 1$$

Insbesondere gilt dann mit  $k = m$ , beziehungsweise  $k = m - 1$  für jedes  $\lambda \leq l$ :

$$d \geq \left\lceil \frac{B_{m,\lambda}^m + 2m - 1}{4m + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^m(m, \lambda), \quad \text{falls } m \text{ gerade und } g_\lambda \geq 2m + 1, \quad \text{und}$$

$$d \geq \left\lceil \frac{B_{m,\lambda}^m - B_{m,\lambda-1}^{m-1} + 2m - 3}{4(m-1) + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^{m-1}(m, \lambda), \quad \text{falls } m \text{ ungerade und } g_\lambda \geq 2m - 1.$$

- Als nächstes soll der Fall  $l = 1$  betrachtet werden.

$$\text{Es ist dann für } k \leq m: |\mathbf{K}_{m,1}^k| = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^i \binom{m}{j} = \sum_{i=0}^k (k+1-i) \binom{m}{j}$$

$$\text{und für } k \geq m: |\mathbf{K}_{m,1}^k| = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^i \binom{m}{j} + 2^m \sum_{i=1}^{k-m} 1$$

$$= (m+2)2^{m-1} + 2^m(k-m) = 2^m k - (m-2)2^{m-1}.$$

(1) ergibt so für  $k = m$  (falls  $m$  gerade) und  $k = m - 1$  (falls  $m$  ungerade):

$$|\mathbf{K}_{m,1}^m| = (m+2)2^{m-1} \quad \text{und} \quad |\mathbf{K}_{m,1}^{m-1}| = (m+2)2^{m-1} - 2^m = m2^{m-1}.$$

Sei  $g_1 \neq 2$  und  $\mathcal{G}$  ein aufspannender Teilgraph des  $G_B(d, n)$  mit  $n \geq d^3$ .

Es ist dann  $d \leq \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = \lfloor \sqrt[3]{g_1 2^{m-1}} \rfloor$ , sodaß aus  $g_1 \leq 2m$  folgt:  $d \leq \lfloor \sqrt[3]{m 2^m} \rfloor$

Ist  $g_1 \geq 2m + 1$  und  $m$  gerade, so folgt dann aus  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$ :

$$d \geq \left\lceil \frac{(m+2)2^{m-1} + 2m - 1}{4m + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^m(m, 1).$$

Für ungerade  $m$  und  $g_1 \geq 2m - 1$  gilt, falls  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$ ,

$$d \geq \left\lceil \frac{m2^{m-1} + 2m - 3}{4(m-1) + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^{m-1}(m, 1).$$

Gilt  $\mathcal{G} \subseteq G_B(d, n)$  so folgt aus (1) für gerade  $m$ :

$$B_{m,1}^m \leq 2m(2\sqrt[3]{g_1 2^{m-1}} - 1) + \frac{1}{2}\sqrt[3]{g_1 2^{m-1}} + 1, \text{ also:}$$

$$g_1 \geq \left\lceil \frac{(2m(2^{m-2} + 1) + 2m - 1)^3}{2^{m-1}(4m + \frac{1}{2})^3} \right\rceil = A_g(m), \text{ falls } g_1 \geq 2m + 1$$

Für ungerade  $m$  und  $g_1 \geq 2m - 1$  folgt schließlich:

$$g_1 \geq \left\lceil \frac{(2m(2^{m-2} + 1) - 3)^3}{2^{m-1}(4(m-1) + \frac{1}{2})^3} \right\rceil = A_g(m), \text{ falls } g_1 \geq 2m - 1,$$

da  $B_{m,l}^{m-1} = B_{m,l}^m - B_{m,l-1}^m$ .

- Nun noch ein paar Überlegungen zum Fall  $l \geq 2$ .

$$\text{Es ist } B_{m,2}^m = \sum_{i_0=0}^m \sum_{i_1=0}^{i_0} \sum_{i_2=0}^{i_1} \binom{m}{i_2}$$

$$= \sum_{i_0=0}^m \sum_{i_1=0}^{i_0} (i_0 - i_1 + 1) \binom{m}{i_1} = \sum_{i=0}^m \binom{m+1-i}{j=1} \binom{m}{i}$$

$$= \sum_{i=0}^m \frac{(m+1-i)(m+1-(i-1))}{2} \binom{m}{i}$$

$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} - (m+1) \sum_{i=0}^m i \binom{m}{i} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m i(i-1) \binom{m}{i}$$

$$= (m+1)(m+2)2^{m-1} - (m+1)m2^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} \sum_{i=0}^{m-2} \binom{m-2}{i}$$

$$= (m+1)2^m + m(m+1)2^{m-3} + m(m-1)2^{m-3} = (m^2 + 7m + 8)2^{m-3}.$$

Wie oben folgt dann aus  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$  für gerades  $m$  und  $g_2 \geq 2m + 1$  die Abschätzung:

$$d \geq \left\lceil \frac{(m+1)(m+6)2^{m-3} + 2^{m-2} + 2m - 1}{4m + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^m(m, 2)$$

und für ungerades  $m$  und  $g_2 \geq 2m - 1$ :

$$d \geq \left\lceil \frac{m(m+3)2^{m-3} + 2m - 3}{4(m-1) + \frac{1}{2}} \right\rceil = A_d^{m-1}(m, 2)$$

- Schließlich betrachten wir den Fall  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_l \times \mathcal{K}_2^{m-l}$  mit  $g_1 = \dots = g_l = g$ . Angenommen, es sei  $\mathcal{G} \subset G_B(d, n)$  und  $n \geq d^D$  mit  $D \geq 2$ .

$$\text{Es ist dann: (4) } d \leq \sqrt[D]{g^l 2^{m-l}}$$

$$\text{und mit (2): } \left(\frac{g}{2}\right)^l 2^m \leq ((g-1)l + 2m)(2 \sqrt[D]{g^l 2^{m-l}} - 1) + \frac{1}{2} \sqrt[D]{g^l 2^{m-l}} + 1$$

$$< 2l \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{l}{D}+1} 2^{\frac{m}{D}+1} + \left(2m - l + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{l}{D} 2^{\frac{m}{D}+1}}$$

$$\text{und also: } \left(\frac{g}{2}\right)^{l-\frac{l}{D}-1} < \frac{1}{2^{m-\frac{m}{D}}} \frac{16m+1}{3},$$

$$(5) \left(\frac{g}{2}\right)^{(D-1)l-D} < \frac{1}{2^{(D-1)m}} \left(\frac{16m+1}{3}\right)^D.$$

Analog lassen sich für den Fall  $|\mathcal{G}| \geq 2d^3$  entsprechende Ungleichungen ableiten:

$$\text{Es gilt zunächst (4')} \quad d \leq \sqrt[3]{g^l 2^{m-l-1}} \text{ und}$$

$$\left(\frac{g}{2}\right)^l 2^m \leq 2((l-1)g + 2m) \left( \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{l}{3}} 2^{\frac{m-1}{3}} - 1 \right) + \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{l}{3}} 2^{\frac{m-1}{3}-1} + 1$$

$$< l \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{l}{3}+1} 2^{\frac{m-1}{3}+2} + \left(2m - l + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{g}{2}\right)^{\frac{l}{3}} 2^{\frac{m-1}{3}+1}$$

$$\text{Damit folgt: (5')} \quad \left(\frac{g}{2}\right)^{2l-3} < \frac{1}{2^{2m}} \left(\frac{8m + \frac{1}{2}}{3}\right)^3.$$

In dem folgenden, abschließenden Korollar werden die Vorbetrachtungen zusammen mit weiteren Überlegungen zum Fall  $m = 2$  zu ein paar Ergebnissen zusammengefaßt.

**Korollar 2** Sei  $m \geq 2$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \dots \times \mathcal{G}_m$ ,  $n$  und  $d$  wie in den Voraussetzungen von Satz 2, das heißt  $d \nmid n$  und  $n \geq d^3$ , falls  $m \geq 3$ ,  $n \geq d^4$  und  $|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2| \geq 3$ , falls  $m = 2$ . Die  $g_i$  seien ohne Einschränkung so nummeriert, daß  $g_1 \geq \dots \geq g_m$ .

i) Ist mit  $g_i = |\mathcal{G}_i|$  und  $l = \max\{i : g_i \geq 3\}$  eines der folgenden Kriterien erfüllt, dann ist  $\mathcal{G}$  kein Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

(1)  $m = 2$  und für  $i = 1, 2$  enthält  $\mathcal{G}_i$  einen Baum  $\mathcal{T}_i$  und eine Ecke  $c_i \in V(\mathcal{T}_i)$  mit einer Tiefe  $t_{in \mathcal{T}_i}(c_i) \geq 5$ . Es gilt für gerade  $4 \leq k_2 \leq k_1 \leq t_{in \mathcal{T}_i}(c_i) - 1$  und  $\Delta_i = \text{Grad}_{in \mathcal{T}_i}(c_i)$ :

$$d < \frac{(\Delta_1 \Delta_2 k_2 (k_1 - \frac{1}{2}(k_2 + 1)) + (\Delta_1 + 4)k_1 + \Delta_2 k_2)}{4k_1 + \frac{1}{2}}$$

$$\text{und, falls } k_1 = k_2 = k, \quad d < \frac{\Delta_1 \Delta_2 (\frac{1}{2}k(k-1)) + k(\Delta_1 + \Delta_2 + 4)}{4k + \frac{1}{2}}$$

(2)  $m, d \geq 3$  und  $\mathcal{G}$  ist ein Hyperwürfel mit  $|\mathcal{G}| \geq d^3$  und  $(m, d) \neq (5, 3)$  oder  $|\mathcal{G}| \geq d^2$  und  $m \geq 11$

(3)  $m, d \geq 3$ ,  $l \geq 1$  und für ein gerades  $k \leq m$  und ein  $1 \leq \lambda \leq l$  gilt  $d < A_d^k(m, \lambda)$

ii) Ist mit  $g_i = |\mathcal{G}_i|$  und  $l = \max\{i : g_i \geq 3\}$  eines der folgenden Kriterien erfüllt, dann ist  $\mathcal{G}$  kein aufspannender Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

(1)  $\mathcal{G}$  ist ein Hyperwürfel

(2)  $m, d \geq 3$ ,  $l = 1$  und  $g_1 < A_g(m)$

(3)  $m, d \geq 3$ ,  $l \geq 2$ ,  $g_1 = \dots = g_l = g$  und  $|\mathcal{G}| \geq 2d^3$   
 oder  $|\mathcal{G}| \geq d^3$ ,  $l \geq 4$  und  $g \neq 3$ , falls  $m = 5$  und  $d = 5$   
 oder  $|\mathcal{G}| \geq d^3$ ,  $l = 3$  und  $m \geq 6$  oder  $g \geq 7$  oder  $d \geq 7$   
 oder  $|\mathcal{G}| \geq d^3$  und  $m \geq 8$  oder  $g \geq 17$  oder  $d \geq 9$   
 oder  $|\mathcal{G}| \geq d^2$ ,  $l \geq 3$  und  $m \geq 12$  oder  $l \geq 8$

denn: i) (1) Es gelte  $k_1 \geq k_2$ . Sei ein Stern  $S_{k,\Delta}$  ein Baum, der aus genau  $\Delta$  Wegen der Länge  $k$  besteht, die eine gemeinsame Ecke  $c$  haben.  $c$  hat also in  $S_{k,\Delta}$  den Grad  $\Delta$ , während  $S_{k,\Delta}$   $(k-1)\Delta$  weitere Ecken mit Grad 2 und  $\Delta$  weitere vom Grad 1 enthält. Da nach Voraussetzung des Korollars  $c_i$  in  $T_i$  eine Tiefe  $t_{in T_i}(c_i) \geq k_i + 1$  und den Grad  $\Delta_i$  hat, ist  $S_{k_1,\Delta_1} \times S_{k_2,\Delta_2} \subset T_G$ . Die Paare von Wegen  $(P_{k_1}, P_{k_2}) \subset S_{k_1,\Delta_1} \times S_{k_2,\Delta_2}$  mit Ecken  $(c_1, c_2)$  lassen sich bijektiv auf die Rechtecke  $P_{k_1} \times P_{k_2} \subset S_{k_1,\Delta_1} \times S_{k_2,\Delta_2}$  mit einem Eckknoten  $c$  abbilden. Es ist

$$r(k_1, k_2) = |\mathbf{V}((P_{k_1} \times P_{k_2}) \setminus (P_{k_1} \cup P_{k_2}))|$$

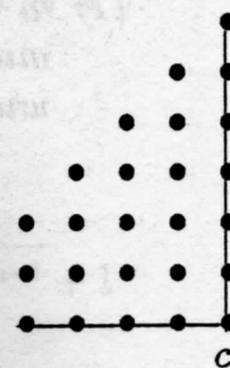
( $k_1=6, k_2=4$ )

$$= \sum_{i=1}^{k_2} i + k_2(k_1 - k_2 - 1) = k_2(k_1 - \frac{1}{2}(k_2 + 1))$$

und damit:

$$|\mathbf{R}^{k_1, k_2}| = \Delta_1 \Delta_2 r(k_1, k_2) + k_1 \Delta_1 + k_2 \Delta_2 + 1$$

$$= \Delta_1 \Delta_2 r(k_1 k_2 - \frac{1}{2} k_2 (k_2 + 1)) + k_1 \Delta_1 + k_2 \Delta_2 + 1$$



Es gilt also  $|\mathbf{R}^{k_1, k_2}| > 4k_1(d-1) + \frac{d}{2} + 1$ , sodaß mit  $d \nmid n$  und  $n \geq d^4$  unmittelbar die Voraussetzung von Satz 2 folgen, da  $k_1, k_2 \geq 4$ .

(2) Es gelte für einen Hyperwürfel  $\mathcal{H} : \mathcal{H} \subset G_B(d, n)$  und es sei zunächst  $|\mathcal{G}| \geq d^3$  und  $n \geq d^3$ . In den Vorbetrachtungen zum Korollar wird gezeigt, daß:  $2^m - 2 \leq 2(m-1)(2 \lfloor 2^{\frac{m}{3}} \rfloor - 1) + \frac{1}{2} \lfloor 2^{\frac{m}{3}} \rfloor + 1$ , also  $m \leq 6$ .

Aus  $m = 6$  und  $d^3 \leq 64$  sowie  $d \leq \lfloor 2^{\frac{6}{3}} \rfloor$  folgt  $d = 4$ , also mit  $k = 3$  aus (1) :  $51 = \sum_{i=0}^3 \binom{6}{i} \leq 6(8-1) + 3 = 45$ , ein Widerspruch.

Aus  $m = 5$  und  $d^3 \leq 32$  sowie  $d \leq \lfloor 2^{\frac{5}{3}} \rfloor$  folgt  $d = 3$ .

Aus  $m \leq 4$  und  $d^3 \leq 2^m$  und  $d \leq \lfloor 2^{\frac{m}{3}} \rfloor$  folgt  $d = 2$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist  $2^m \geq d^3$  und  $(m, d) \neq (5, 3)$ , dann ist also  $\mathcal{G}$  kein Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

Der  $K_2^5$  ist kein aufspannender Teilgraph des  $G_B(3, 32)$ , weil der  $G_B(3, 32)$  eine Ecke vom Grad  $4 < 5$  enthält.

Gilt  $2^m \geq d^2$ , dann gilt nach der Vorbetrachtung

$$2^m - 2 \leq 2(m-1)(2 \lfloor 2^{\frac{m}{2}} \rfloor - 1) + \frac{1}{2} \lfloor 2^{\frac{m}{2}} \rfloor + 1 \text{ und damit } m \leq 10.$$

(3) gilt mit den Vorbetrachtungen.

ii) (1) ist bereits im Beweis von (1) ii) gezeigt.

(2) gilt mit den Vorbetrachtungen zum Korollar.

(3) Es sei  $g = g_1$  und zunächst  $|\mathcal{G}| \geq 2d^3$ .

Mit den Vorbetrachtungen gilt dann: (4')  $d \leq \left\lfloor \sqrt[3]{g^l 2^{m-l-1}} \right\rfloor$

und mit (2):  $g^l 2^{m-l} \leq 2((g-1)l + 2m)(d-1) + \frac{d}{2} + 1$ ,

also: (2')  $d \geq \left\lfloor \frac{g^l 2^{m-l} + 2((g-1)l + 2m) - 1}{2((g-1)l + 2m) + \frac{1}{2}} \right\rfloor$

Ist  $m = 3$ , so folgt aus (5') aus der Vorbetrachtung:  $\left(\frac{g}{2}\right)^{2l-3} < 9$  und damit  $l = 3$  und  $g_1 \leq 4$  oder  $l = 2$  und  $g \leq 17$ . Aus  $m = 4$  folgt aus (5'):  $\left(\frac{g}{2}\right)^{2l-3} < 5$  und damit  $l = g = 3$  oder  $l = 2$  und  $g \leq 9$ .

Aus  $m = 5$  folgt  $l = 2$  und  $g \leq 4$  und aus  $m \geq 6$  schließlich  $g < 3$ , ein Widerspruch.

Jetzt müssen nur noch die noch übrigen Fälle betrachtet werden. Durch Einsetzen in die Formeln (2') und (4') folgt daraus jeweils ein Widerspruch, zusammen mit der Überlegung, daß aus Gradgründen  $2d \geq m + l$  gelten muß.

Sei jetzt  $|\mathcal{G}| \geq d^3$ .

Wie oben lassen sich hier aus den Vorbetrachtungen drei Ungleichungen ableiten:

$$(4) \quad d \leq \left\lfloor \sqrt[3]{\left(\frac{g}{2}\right)^l 2^m} \right\rfloor,$$

$$(2') \quad d \geq \left\lfloor \frac{g^l 2^{m-l} + (g-1)l + 2m - 1}{2((g-1)l + 2m) + \frac{1}{2}} \right\rfloor$$

$$\text{und (5)} \quad \left(\frac{g}{2}\right)^{2l-3} < \frac{1}{2^{2m}} \left(\frac{16m+1}{3}\right)^3$$

Ist  $l \geq 6$ , dann folgt  $m \geq 6$  und damit aus (5):  $g < 3$ , ein Widerspruch.

Aus  $l = 5$  folgt so  $g = 3$  und aus  $l = 4$  folgt  $g \leq 4$ . Die Behauptung des Korollars in diesen Fällen folgt durch Einsetzen in (2') und (4), da auch aus Gradgründen  $2d \geq m + l$  gilt.

Gilt  $l = 3$ , so folgt  $g \leq 8$  und durch Einsetzen in (2') und (4):

$$(m, g, d) \in \{(5, 3, 4), (4, 4, 5), (4, 3, 3), (3, 6, 6), \\ (3, 5, 5), (3, 5, 4), (3, 4, 4), (3, 4, 3), (3, 3, 3)\},$$

also auch die Behauptung des Korollars.

Auch der Fall  $l = 2$  wird auf diese Weise gezeigt. Ist  $m \geq 8$ , so folgt aus

(5):  $g < 3$ , ein Widerspruch.

Sei nun  $n \geq d^2$ .

Es gilt dann:

$$(5) \quad \left(\frac{g}{2}\right)^{l-2} < \frac{1}{2^m} \left(\frac{16m+1}{3}\right)^2,$$

woraus die Behauptung des Korollars für diesen Fall folgt.

### 4.3 Berechnung von Beispielen

Für kleine  $m$  sind in den folgenden Tabellen die errechneten Werte für die Bedingungen von Korollar 2 i)(3) und ii)(2) angegeben:

Zunächst für ii)(2): Es sei  $l = 1$ ,  $m, d \geq 3$  und  $n \geq d^3$ .

Ist  $g_1 \leq 2m$  und  $d > \sqrt[3]{m2^m}$  oder ist  $g_1 \geq 2m + 1$  (beziehungsweise  $g_1 \geq 2m - 1$ , falls  $m$  ungerade) und  $d < A_d^m(m, 1)$  (beziehungsweise  $d < A_d^{m-1}(m, 1)$ , falls  $m$  ungerade) oder  $g < A_g(m)$ ,

dann ist  $\mathcal{G}$  kein aufspannender Teilgraph des  $G_B(d, n)$ .

In der nachfolgenden Tabelle sei  $A_d(m, 1) = A_d^m(m, 1)$ , falls  $m$  gerade und  $A_d(m, 1) = A_d^{m-1}(m, 1)$ , falls  $m$  ungerade.

$m =$	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt[3]{m2^m} =$	2	4	5	7	9	12	16
$A_d(m, 1) =$	2	4	6	11	19	40	72
$A_g(m) =$	2	5	10	41	103	495	1420

Korollar 2 i)(3) besagt, daß  $\mathcal{G}$  kein Teilgraph des  $G_B(d, n)$  ist falls für  $\lambda \leq l$  und ein gerades  $k \leq m$  gilt:  $g_\lambda \geq 2k + 1$  und  $d \geq A_d^k(m, \lambda)$ .

$m = 3$

$\lambda =$	1	2	3
$A_d^2(3, \lambda) =$	2	3	4

$m = 4$

$\lambda =$	1	2	3	4
$A_d^2(4, \lambda) =$	3	4	5	6
$A_d^4(4, \lambda) =$	4	7	13	20

$m = 5$

$\lambda =$	1	2	3	4	5
$A_d^2(5, \lambda) =$	4	4	6	7	8
$A_d^4(5, \lambda) =$	6	11	18	28	42

$m = 6$

$\lambda =$	1	2	3	4	5	6
$A_d^2(6, \lambda) =$	4	5	7	8	9	11
$A_d^4(6, \lambda) =$	9	15	25	38	56	79
$A_d^6(6, \lambda) =$	11	29	63	122	219	368

$m = 7$

$\lambda =$	1	2	3	4	5	6	7
$A_d^2(7, \lambda) =$	5	6	8	9	11	12	14
$A_d^4(7, \lambda) =$	13	22	35	52	74	102	137
$A_d^6(7, \lambda) =$	19	47	97	182	315	517	810

$m = 8$

$\lambda =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$A_d^2(8, \lambda) =$	6	8	9	11	12	14	16	18
$A_d^4(8, \lambda) =$	19	31	48	69	96	130	172	222
$A_d^6(8, \lambda) =$	32	74	147	266	449	719	1103	1637
$A_d^8(8, \lambda) =$	40	127	324	721	1455	2731	4837	8177

$m = 9$

$\lambda =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_d^2(9, \lambda) =$	8	9	10	12	14	16	18	20	22
$A_d^4(9, \lambda) =$	28	43	64	90	123	164	213	273	343
$A_d^6(9, \lambda) =$	54	116	220	385	632	988	1488	2170	3083
$A_d^8(9, \lambda) =$	72	214	521	1118	2190	4006	6944	11517	18414

Die für diese Berechnungen benötigten Werte von  $B_{m,\lambda}^k$  sind mit einem in Pascal geschriebenen Computerprogramm errechnet worden, das folgenden Seite angegeben ist.

*avt dev*

*Das Pascal Programm zur Berechnung der  $B_{m,l}^k$  :*

```
program Binomialsumme;
type vector = array[0..15] of longint;

function Binom (m,i : integer) : longint;
  var bin : longint;

begin
  if (i=0) or (m=1) or (i=m) then Binom := 1
  else Binom := Binom(m-1,i-1) + Binom(m-1,i);
end;

  (Berechnet  $\binom{m}{i}$  für  $i \leq m$ )

function Binomsumme (m,l,k,index : integer) : longint;
  var ind : vector;
  var binomsum : vector;
  var i : integer;

begin
  binomsum[index] := 0;
  if index >= 1 then
    for i := 0 to k do binomsum[index] := binomsum[index]
      + Binom(m,i)
  else begin
    ind[index] := 0;
    repeat
      i := ind[index];
      binomsum[index] := binomsum[index]
        + Binomsumme(m,l,i,index+1);
      ind[index] := ind[index]+1;
    until ind[index] > k;
  end;
  Binomsumme := binomsum[index];
end;

begin
  Binomsumme(m,l,k,0);
end.
```

*Der Wert von  $B_{m,l}^k$  wird mit dem Aufruf von  $\text{Binomsumme}(m,l,k,0)$  errechnet.*

Für  $3 \leq m \leq 9$  und  $l, k \leq m$  sind nun noch die mit diesem Programm berechneten Werte von  $B_{m,l}^k$  angegeben:

m = 3

k=	0	1	2	3
l = 0	1	4	7	8
l = 1	1	5	12	20
l = 2	1	6	18	38
l = 3	1	7	25	63

m = 4

k=	0	1	2	3	4
l = 0	1	5	11	15	16
l = 1	1	6	17	32	48
l = 2	1	7	24	56	104
l = 3	1	8	32	88	192
l = 4	1	9	41	129	321

m = 5

k=	0	1	2	3	4	5
l = 0	1	6	16	26	31	32
l = 1	1	7	23	49	80	112
l = 2	1	8	31	80	160	272
l = 3	1	9	40	120	280	552
l = 4	1	10	50	170	450	1002
l = 5	1	11	61	231	681	1683

m = 6

k=	0	1	2	3	4	5	6
l = 0	1	7	22	42	57	63	64
l = 1	1	8	30	72	129	192	256
l = 2	1	9	39	111	240	432	688
l = 3	1	10	49	160	400	832	1520
l = 4	1	11	60	220	620	1452	2972
l = 5	1	12	72	292	912	2364	5336
l = 6	1	13	85	377	1289	3653	8989

m = 7

k=	0	1	2	3	4	5	6	7
l = 0	1	8	29	64	99	120	127	128
l = 1	1	9	38	102	201	321	448	576
l = 2	1	10	48	150	351	672	1120	1696
l = 3	1	11	59	209	560	1232	2352	4048
l = 4	1	12	71	280	840	2072	4424	8472
l = 5	1	13	84	364	1204	3276	7700	16172
l = 6	1	14	98	462	1666	4942	12642	28814
l = 7	1	15	113	575	2241	7183	19825	48639

$m = 8$

k=	0	1	2	3	4	5	6	7	8
l = 0	1	9	37	93	163	219	247	255	256
l = 1	1	10	47	140	303	522	769	1024	1280
l = 2	1	11	58	198	501	1023	1792	2816	4096
l = 3	1	12	70	268	769	1792	3584	6400	10496
l = 4	1	13	83	351	1120	2912	6496	12896	23392
l = 5	1	14	97	448	1568	4480	10976	23872	47264
l = 6	1	15	112	560	2128	6608	17584	41456	88720
l = 7	1	16	128	688	2816	9424	27008	68464	157184
l = 8	1	17	145	833	3649	13073	40081	108545	265729

$m = 9$

k=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
l = 0	1	10	46	130	256	382	466	502	511	512
l = 1	1	11	57	187	443	825	1291	1793	2304	2816
l = 2	1	12	69	256	699	1524	2815	4608	6912	9728
l = 3	1	13	82	338	1037	2561	5376	9984	16896	26624
l = 4	1	14	96	434	1471	4032	9408	19392	36288	62912
l = 5	1	15	111	545	2016	6048	15456	34848	71136	134048
l = 6	1	16	127	672	2688	8736	24192	59040	130176	264224
l = 7	1	17	144	816	3504	12240	36432	95472	225648	489872
l = 8	1	18	162	978	4482	16722	53154	148626	374274	864146
l = 9	1	19	181	1159	5641	22363	75517	224143	598417	1462563

## 5 Schlußbemerkung

In den Betrachtungen von [ANS94] und [HOS92] über die Einbettung von kartesischen Produkten von Graphen, insbesondere von Gittern und Hyperwürfeln in den (gewöhnlichen) de Bruijn Graphen  $B(d, N)$  über dem Alphabet  $\{0, \dots, d-1\}$  mit Wortlänge  $N$  wird deutlich, daß mit wachsendem  $N$  die Mächtigkeit der einbettbaren Graphenprodukte konstant bleibt, während die des  $B(d, N)$  mit  $d^N$  wächst. Für große  $N$ , das heißt  $N \geq 5$ , mit Einschränkungen auch für  $N = 4$  und mit weiteren Einschränkungen auch für  $N = 3$ , sind im Wesentlichen nur die jeweils erste und letzte Stelle der Wörter  $\langle x_{N-1}, \dots, x_0 \rangle$ , mit denen die Ecken des  $B(d, N)$  bezeichnet sind, in diesen Einbettungen variabel, während die inneren Ziffern über die Vierkreisstruktur der einzubettenden Graphen nicht erreichbar sind. Für Produkte von mehr als zwei Graphen oder von zwei Graphen mit Mächtigkeit  $\geq 3$  bleibt diese Eigenschaft für verallgemeinerte de Bruijn Graphen  $G_B(d, n)$  erhalten, falls  $d|n$ . Für Leitern, zum Beispiel, oder Einbettungen von Produkten von zwei Graphen in den  $G_B(d, n)$  mit  $n < d^4$  sind auch hier andere Ergebnisse zu erwarten, als für den gewöhnlichen de Bruijn Graphen. Das Beispiel im zweiten Kapitel dieser Arbeit zeigt, daß im allgemeinen Fall  $d \nmid n$  für Produkte von Graphen mit sehr unterschiedlichen Mächtigkeiten völlig andere Ergebnisse zu erwarten sind, denn ähnlich wie die Leiter in diesem Beispiel ließen sich auch Einbettungen zum Beispiel für  $\mathcal{G} \in \{\mathcal{P}_j \times \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j \times \mathcal{K}_2^i\}$  für kleine  $i$  und genügend große  $d$  finden. Solche Einbettungen zu finden ist sicherlich nicht trivial, würde aber zeigen, daß in Bezug auf kartesische Graphenprodukte der verallgemeinerte de Bruijn Graph, insbesondere wenn  $\text{ggT}(d, n) = 1$ , bessere Einbettungseigenschaften hat als der gewöhnliche de Bruijn Graph.

Eine weitere interessante Fragestellung, die bislang nicht untersucht worden ist, ist die der Übertragbarkeit dieser Ergebnisse auf den (verallgemeinerten) Kautz Graphen  $G_I(d, n)$ . In Bezug auf das Grad Durchmesser Problem ist der  $G_I(d, n)$  eine bessere Lösung als der  $G_B(d, n)$  und es ist zu erwarten, daß Betrachtungen über den  $G_I(d, n)$  nicht allzu verschieden sind von denen über den  $G_B(d, n)$ .

Vielleicht kann die vorliegende Arbeit eine Anregung sein für weitere Untersuchungen über verallgemeinerte de Bruijn und Kautz Graphen.

## 6 Literaturliste

### A) Grundlagen

- ANS94 Thomas Andreae, Michael Nölle, Gerald Schreiber : *Cartesian Products of Graphs as Spanning Subgraphs of de Bruijn Graphs*; in *Proc. of the 20th Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Computer Science, Springer (Juni 1994)*.
- HOS92 M.C. Heydemann, J. Opatrny, D. Sotteau : *Embeddings of Hypercubes and Grids into de Bruijn Graphs*; in *Proc. of the 1992 International Conference on Parallel Processing, Vol. 3 (August 1992)*.
- J94 Dieter Jungnickel : *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*; 3. Auflage, BI-Wissenschaftsverlag (1994).
- NZ80 Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman : *An Introduction to the Theory of Numbers*; 4. Auflage, John Wiley & Sons (1980).

### B) Verallgemeinerte de Bruijn und Kautzgraphen

- BHP89 J.C. Bermond, N. Homobono, C. Peyrat : *Large Fault - Tolerant Interconnection Networks*; in *Graphs and Combinatorics, Vol. 5 (1989)*.
- DHHZ91 D.Z. Du, D.F. Hsu, F.K. Hwang, X.M. Zhang : *The Hamiltonian Property of Generalized de Bruijn Digraphs*; in *Journal of Combinatorial Theory, B 52 (1991)*.
- DHP92 D.Z. Du, D.F. Hsu, G.W. Peck : *Connectivity of Consecutive-d Digraphs*; in *Discrete Applied Mathematics, 37/38 (1992)*.
- DH88 D.Z. Du, F.K. Hwang : *Generalized de Bruijn Graphs*; in *Networks, Vol. 18 (1988)*.
- H88 Nathalie Homobono : *Connectivity of the Undirected Imase and Itoh Networks*; in *Proc. of the 11th British Conference, Ars Combinatorica, 25 C (1988)*.
- HP88 Nathalie Homobono, Claudine Peyrat : *Connectivity of Imase and Itoh Digraphs*; in *IEEE Transactions on Computers, Vol. 37,11 (November 1988)*.
- II81 Makato Imase, Masaki Itoh : *Design to Minimize Diameter on Building-Block Network*; in *IEEE Transactions on Computers, Vol. 30,6 (Juni 1981)*.

- II83 Makoto Imase, Masaki Itoh : *Design for Directed Graphs with Minimum Diameter*; in *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 32,8 (August 1983).
- INS90 Makoto Imase, Hiroshi Nakada, Terunao Soneoka : *Design of a d-Connected Digraph with a Minimum Number of Edges and a Quasiminimal Diameter*; in *Discrete Applied Mathematics*, 27 (1990).
- IOS85 Makoto Imase, Keiji Okada, Terunao Soneoka : *Connectivity of Regular Directed Graphs with Small Diameters*; in *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 34,3 (März 1983).
- KPR80 J.G. Kuhl, D.K. Pradhan, S.M. Reddy : *Directed Graphs with Minimum Diameter and Maximum Node Connectivity*; in *School of Engineering, Oakland University, Technical Report* (1980).

### C) Das Grad Durchmesser Problem

- BI73 E. Bannai, T. Ito : *On Finite Moore Graphs*; in *Journal of the Faculty of Science, Tokyo University*, 20 (1973).
- BT80 W.G. Bridges, Sam Toueg : *On the Impossibility of Directed Moore Graphs*; in *Journal of Combinatorial Theory, B* 29 (1980).
- DH94 Michael J. Dineen, Paul R. Hafner : *New Results for the Degree Diameter Problem*; in *Networks*, 24 (1994).
- HS60 A.J. Hoffman, R.R. Singleton : *On Moore Graphs with Diameter 2 and 3*; in *IBM Journal*, 4 (1960).
- INPS87 M.Imase, H.Nakada, C.Peyrat, T.Soneoka : *Sufficient Conditions for Maximally Connected Dense Graphs*; in *Discrete Mathematics*, 63 (1987).

1153 Makoto Imase, Masaki Aoki, and Minoru...  
Block Network, in *IPSS Design and Construction*,  
1981).

1088...  
Design of a...  
Graph with a minimum number of edges and a given...  
in *Discrete Applied Mathematics*, 7:1-10 (1981).

1089...  
Lectures in...  
Graphs with Min...

1090...  
Conference on...  
Journal of the Faculty...

1091...  
Journal of...  
1980.

1092...  
Journal of...  
1981.

1093...  
Journal of...  
1981.

DH791 D.Z. Du, D.F. Hu, C.H. Hu, D.D. Hu, D.D. Hu  
Property of Generalized  $n$ -ary Digraphs,  
*Theory, B* 59 (1981).

DH792 D.Z. Du, D.F. Hu, C.H. Hu, D.D. Hu, D.D. Hu  
graphs, in *Discrete Applied Mathematics*, 1:1-10  
(1981).

DH793 D.Z. Du, F.K. Huang, Generalized  $n$ -ary  
Vol. 18 (1988).

H83 Nathalie Homolano, Connectedness of the Unit  
works, in *Proc. of the 11th Pacific Conference*  
(1988).

HP83 Nathalie Homolano, Connectedness of the Unit  
Digraphs, in *IEEE Transactions on Computers*  
1983).

1181 Makoto Imase, Masaki Aoki, and Minoru...  
Block Network, in *IPSS Design and Construction*,  
1981).